不定積分を使って解ける常微分方程式

合成関数の微分

x を変数とする関数 $f(x)$ について、x が変数 t の関数 $x(t)$ となっていると、
$\dfrac{\mathrm{d}f(x(t))}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x(t))\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = f'(x(t))x'(t)$ となる。
逆に、置換積分 $f(x(b)) - f(x(a)) = \displaystyle\int_{x(a)}^{x(b)} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$ となる。

変数分離形 $y' = X(x)Y(y).$

例： $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (1-u)u.$ logistic 方程式。
$\dfrac{1}{(1-u)u}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 1$ だから両辺を積分して $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{(1-u)u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_0^t 1\mathrm{d}t$
$\dfrac{1}{(1-u)u} = \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{1-u}$ であり、この u の関数の不定積分は
$\log|u| - \log|1-u| = \log|\dfrac{u}{1-u}|$ であるから、
$\displaystyle\int_0^t \frac{1}{(1-u)u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{1}{(1-u)u}\mathrm{d}u = \log|\frac{u(t)}{1-u(t)}| - \log|\frac{u(0)}{1-u(0)}| = t.$
すなわち、$\dfrac{u(t)}{1-u(t)}\dfrac{1-u(0)}{u(0)} = \pm e^t.$ ここで $t=0$ で $u = u(0)$ だから、$\pm$ は $+$ の方をとる。
$\dfrac{u(t)}{1-u(t)} = \dfrac{u(0)}{1-u(0)}e^t.$
$u(t) = \dfrac{u(0)}{1-u(0)}e^t(1-u(t)).$
$(1 + \dfrac{u(0)}{1-u(0)}e^t)u(t) = \dfrac{u(0)}{1-u(0)}e^t$
$u(t) = \dfrac{u(0)e^t}{1-u(0)+u(0)e^t}$
解は、$0 < u(0) < 1$ ならば、$\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(t) = 1,\ \lim_{t\to-\infty} u(t) = 0.$
$u(0) > 1$ ならば、$\displaystyle\lim_{t\to\infty} u(t) = 1,\ \lim_{t\to\log\frac{u(0)-1}{u(0)}} u(t) = +\infty.$
$u(0) < 1$ ならば、$\displaystyle\lim_{t\to-\infty} u(t) = 0,\ \lim_{t\to\log\frac{u(0)-1}{u(0)}} u(t) = -\infty.$

反省。不定積分として $\displaystyle\int \frac{1}{(1-u)u}\mathrm{d}u = \int 1\mathrm{d}t$ だから、
$\log|\dfrac{u(t)}{1-u(t)}| = t + C.$
C を取り替えて、$\dfrac{u(t)}{1-u(t)} = Ce^t$ として、$C = \dfrac{u(0)}{1-u(0)}$ である。

ゆえに、$u(t) = \dfrac{Ce^t}{1+Ce^t} = \dfrac{u(0)e^t}{1-u(0)+u(0)e^t}$.

このように不定積分を積分定数を適当において定め、あとで積分定数を定める方が効率的かもしれない。

問。[YE]（柳田・栄の参考書）, p. 27.

問。　変数分離形の微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = X(x)Y(y)$ の解法をまとめよ。([YE], p. 23–25)

同次形

例。$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{1-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}}$

$z = \dfrac{y}{x}$ とおく。$y = zx$ だから、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}x + z$.

$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}x = \dfrac{1-z}{1+z} - z = \dfrac{1-2z-z^2}{1+z}$

$\dfrac{1+z}{1-2z-z^2}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}$

$\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{1+z}{1-2z-z^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x}\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$

$\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{1+z}{1-2z-z^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int_{z(x_0)}^{z}(x)\frac{1+z}{1-2z-z^2}\mathrm{d}z$ について、$w = 1-2z-z^2$ とすると、$\mathrm{d}w = -2(1+z)\mathrm{d}z$.

だから、左辺 $\displaystyle= \int_{w(z(x_0))}^{w(z(x))} -\frac{1}{2}\frac{1}{w}\mathrm{d}w = -\frac{1}{2}(\log|w(z(x))| - \log|w(z(x_0))|).$

$\log|1-2z(x)-z(x)^2| - \log|1-2z(x_0)-z(x_0)^2| = -2(\log|x| - \log|x_0|)$

$\dfrac{1-2z(x)-z(x)^2}{1-2z(x_0)-z(x_0)^2} = \pm\dfrac{{x_0}^2}{x^2}$. ここで $\pm$ は $+$ をとる。

$1-2z(x)-z(x)^2 = \dfrac{{x_0}^2}{x^2}(1-2z(x_0)-z(x_0)^2)$. ここで $\pm$ は $+$ をとる。

$1-2\dfrac{y(x)}{x} - \dfrac{y(x)}{x^2} = \dfrac{{x_0}^2}{x^2}(1-2\dfrac{y(x_0)}{x_0} - \dfrac{y(x_0)}{{x_0}^2})$.

$x^2-2xy-y^2 = {x_0}^2 - 2x_0y(x_0) - y(x_0)^2$

同じ反省。

不定積分として $\displaystyle\int \frac{1+z}{1-2z-z^2}\mathrm{d}z = \int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ だから、

$-\dfrac{1}{2}\log|1-2z-z^2| = \log|x| + C$.

従って、別の C に取り替えて $(1-2z-z^2)x^2 = C$.

すなわち、$x^2-2xy-y^2 = C$.

問　[YE] p.28 例題. [YE] p. 34 問 (1)

問　同次形の微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\dfrac{y}{x})$ の解法についてまとめよ。[YE] p.27–28.

１階線形常微分方程式（定数変化法）

例。 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy = x.$

y と $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ について、関数を係数として線形になっている。

まず、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy = 0$ を解く。線形な場合の常套手段。

これは変数分離形だから、$\dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x$ を積分して $\displaystyle\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = -\int x\mathrm{d}x.$

つまり $\log|y| = -\dfrac{x^2}{2} + C.$

C を取り替えて、$y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$

もとの方程式の解を $y = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ の形で探す。定数変化法という。

これを代入すると、$\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}e^{-\frac{x^2}{2}} + C\dfrac{\mathrm{d}e^{-\frac{x^2}{2}}}{\mathrm{d}x} + xCe^{-\frac{x^2}{2}} = x$

すなわち、$\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}e^{-\frac{x^2}{2}} = x$ を得る。

$\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = xe^{\frac{x^2}{2}}$ だから、$C(x) = \displaystyle\int xe^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = e^{\frac{x^2}{2}} + C_1$

従って、$y = (e^{\frac{x^2}{2}} + C_1)e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + C_1e^{-\frac{x^2}{2}}.$

問 [YE] p.35 例題。 [YE] p.40 問 (1).

問 １階線形微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$ について、解法をまとめよ。[YE] p.34–35.

１階線形微分方程式に帰着されるよく知られている微分方程式

ベルヌーイの微分方程式

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + P(t)y = Q(t)y^m$ $(m \neq 0, 1)$

（両辺を y^m で割ってみる。）

$z = y^{1-m}$ について $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + (1-m)P(t)z = (1-m)Q(t)$ となる。

問 [YE] p.37 例題。

問 [YE] p.40 問 2.3。

リッカチ型微分方程式（$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ が独立変数の関数を係数とする y の２次式）

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = P(t)y^2 + Q(t)y + R(t)$

ひとつの解 $\varphi(t)$ がわかっているとき、$z = y - \varphi$ は

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\\ &= P(t)(y^2-\varphi^2) + Q(t)(y-\varphi) = P(t)z(z+2\varphi) + Q(t)z\end{aligned}$$

すなわち、

$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - (2\varphi(t)P(t) + Q(t))z = P(t)z^2$ というベルヌーイ型の微分方程式を満たす。したがって $z = u^{-1}$ が1階線形微分方程式の解として求まる。このとき、$y(t) = \varphi(t) + z(t)^{-1}$ と求まる。

問　[YE] p.39 例題。
問　[YE] p.40 問 2.4。