

関数の微分とグラフの傾き。

$y = f(x)$ のグラフを考える。グラフ上の点 $(x_0, f(x_0))$ におけるグラフの傾きは、 $f(x)$ の x_0 における微分 $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$ で与えられる。

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

積分。

導関数 $g(x)$ が与えられたとき、 $f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = g(x)$ となる $f(x)$ は、 $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(x)dx$ で与えられる。

$f(x_0)$ が指定されていなければ、積分定数の差を除いて $f(x)$ は定まる。

微分方程式とは何か。

関数の微分が関数自体 (の値) に依存する関係を表すものが微分方程式である。

例

以下では、変数を明示した書き方を使う。

放射性物質の崩壊： $\frac{du}{dt} = -ku$.

ロジスティック方程式： $\frac{du}{dt} = (a - bu)u$.

単振動の方程式： $m \frac{d^2u}{dt^2} = -ku$.

これらの式の意味を考えよ。

上の関係式を満たす関数

最初の2つの例では xu 平面上の各点 (x, u) に傾きが与えられている。この例では u だけの関数。傾きを与える曲線が u のグラフとなる。 $\frac{du}{dt} = -ku$ ならば、 $u(t) = e^{-kt}u_0$.

最後のものは、位置 u 、速度 $v = \frac{du}{dt}$ が状態を表し、 $m = k = 1$ ならば、 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ における微分 (変化率) は $\begin{pmatrix} v \\ -u \end{pmatrix}$ 。この変化率を実現する運動が、 u の軌道となる。 uv 平面上の円となる。 $m = k = 1$ ならば、 $u = K \sin(t - t_0)$, $v = K \cos(t - t_0)$.

$\frac{dx}{dt} = x$ の解き方

(0) 答えを知って当てはめる。 $x = x_0 e^t$.

(1) 変数分離。

$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = 1$ だから $\int \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} dt = \int 1 dt$. 故に、 $\log|x| = t + c$, すなわち $x = C e^t$.

(2) 折れ線近似。

0 で値が x_0 , $[0, t]$ で、傾きが x_0 ならば、 $x_0 + tx_0$.

0 で値が x_0 , $[0, \frac{t}{2}]$ で、傾きが x_0 ならば、 $\frac{t}{2}$ での値は $x_0 + \frac{t}{2}x_0$, $[\frac{t}{2}, t]$ での傾きは $x_0 + \frac{t}{2}x_0$ として、 t での値は $x_0 + \frac{t}{2}x_0 + \frac{t}{2}(x_0 + \frac{t}{2}x_0) = x_0(1 + \frac{t}{2})^2$.

同様に 3 分割のときは、 t での値は、 $x_0 + \frac{t}{3}x_0 + \frac{t}{3}(x_0 + \frac{t}{3}x_0) + \frac{t}{3}(x_0 + \frac{t}{3}x_0 + \frac{t}{3}(x_0 + \frac{t}{3}x_0)) = x_0(1 + \frac{t}{3})^3$.

N 分割ならば、 $x_0(1 + \frac{t}{N})^N$. $N \rightarrow \infty$ のとき、 $x_0(1 + \frac{t}{N})^N \rightarrow x_0e^t$ である。

(3) 冪級数解。

$x = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ とする。

$$\frac{dx}{dt} = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}t^n$$

従って、 $a_0 = x_0$, $a_1 = a_0 = x_0$, $a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}x_0$, $a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{3!}x_0$, \dots

$$a_n = \frac{1}{n!}x_0. \text{ 従って、 } x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x_0 t^n = x_0e^t.$$

(4) 積分の反復。

$\frac{dx}{dt} = x$ は、 $x = x_0 + \int_0^t \frac{dx}{dt} dt = x_0 + \int_0^t x dt$ と同値である。

$[0, t]$ 上で $x = f_0(t) = 0$ とする。

$$f_1(t) = x_0 + \int_0^t f_0(t) dt = x_0.$$

$$f_2(t) = x_0 + \int_0^t f_1(t) dt = x_0 + x_0 t.$$

$$f_3(t) = x_0 + \int_0^t f_2(t) dt = x_0 + x_0 t + x_0 \frac{t^2}{2}.$$

$$f_4(t) = x_0 + \int_0^t f_3(t) dt = x_0 + x_0 t + x_0 \frac{t^2}{2} + x_0 \frac{t^3}{3!}.$$

$$f_n(t) = x_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \text{ とすると } f_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t f_n(t) dt = x_0 \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \text{ となる。これ$$

は x_0e^t に収束する。