常微分方程式（担当：坪井　俊）の小テスト（６月１４日）の解答例

問題１． (1) 変数分離形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (3x^2-1)(y-1)(y+1)$ の一般解を求めよ。

解答例 $\displaystyle\int \frac{1}{(y-1)(y+1)}\mathrm{d}y = \int (3x^2-1)\mathrm{d}x$ について、

左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{(y-1)(y+1)}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1})\mathrm{d}y$

$$= \frac{1}{2}(\log|y-1| - \log|y+1|) + 定数 = \frac{1}{2}\log|\frac{y-1}{y+1}| + 定数$$

右辺は $\displaystyle\int (3x^2-1)\mathrm{d}x = x^3 - x + 定数$

従って $\log|\dfrac{y-1}{y+1}| = 2(x^3-x) + C_1$.

$\dfrac{y-1}{y+1} = Ce^{2(x^3-x)}$, $y-1 = Ce^{2(x^3-x)}(y+1)$, $y = \dfrac{1+Ce^{2(x^3-x)}}{1-Ce^{2(x^3-x)}}$

(2) 変数分離形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y-1)y\cos x$ の $y(0) = \dfrac{1}{2}$ となる解を求めよ。

解答例 $\displaystyle\int \frac{1}{(y-1)y}\mathrm{d}y = \int \cos x\mathrm{d}x$ について、

左辺は $\displaystyle\int \frac{1}{(y-1)y}\mathrm{d}y = \int (\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y})\mathrm{d}y$

$$= \log|y-1| - \log|y| + 定数 = \log|\frac{y-1}{y}| + 定数$$

右辺は $\displaystyle\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + 定数$

従って $\log|\dfrac{y-1}{y}| = \sin x + C_1$.

$\dfrac{y-1}{y} = Ce^{\sin x}$, $y = \dfrac{1}{1-Ce^{\sin x}}$

ここで、$y(0) = \dfrac{1}{2}$ だから $C = -1$ で、$y = \dfrac{1}{1+e^{\sin x}}$

(3) 微分形式 $y^2\mathrm{d}x + (2-xy)\mathrm{d}y$ は 2 変数関数 $f(x,y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ となるかどうか判定せよ。

解答例 $\dfrac{\partial}{\partial y}y^2 = 2y$, $\dfrac{\partial}{\partial x}(2-xy) = -y$ は異なるので，2 変数関数 $f(x,y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ とならない。

(4) 上記 (3) の微分形式に $\dfrac{1}{y^3}$ をかけて得られる微分形式 $\dfrac{1}{y}\mathrm{d}x + \dfrac{2-xy}{y^3}\mathrm{d}y$ は 2 変数関数 $f(x,y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ となるかどうか判定せよ。

解答例 $\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{y^2}$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{2-xy}{y^3} = -\dfrac{1}{y^2}$ は等しいので，2 変数関数 $f(x,y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ となる。実際、$\dfrac{1}{y}\mathrm{d}x + \dfrac{2-xy}{y^3}\mathrm{d}y = \mathrm{d}(\dfrac{xy-1}{y^2})$

(5) $t>0$ に対して定義された1階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-2\dfrac{x}{t}=t^3$ の $x(1)=1$ となる解を求めよ。

解答例 同次方程式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-2\dfrac{x}{t}=0$ の解は、

$\displaystyle\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{2}{t}\mathrm{d}t$ から $\log|x|=2\log|t|+C_1$, $x=Ct^2$ である。

定数変化法を用いる。

$x(t)=C(t)t^2$ とすると、

$\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}t^2=t^3$ を得る。

従って、$C=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int t\mathrm{d}t=\frac{t^2}{2}+C_2$

$x(t)=(\dfrac{t^2}{2}+C_2)t^2=\dfrac{1}{2}(t^4+2C_2t^2)$ について、

$x(1)=1$ だから $C_2=\dfrac{1}{2}$.

従って、$x(t)=\dfrac{1}{2}t^2(1+t^2)$

問題2． (1) 行列の指数関数 e^{tA} の定義を書き、行列 $A=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ に対して、e^{tA} を計算せよ。

解答例 $e^{tA}=I+tA+\dfrac{t^2}{2}A^2+\dfrac{t^3}{3!}A^3+\cdots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n$

$\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ は可換（$\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$）だから

$\exp(t\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix})=\exp(t\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix})\exp(t\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix})$

ここで、$\exp(t\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}e^{3t}&0\\0&e^{3t}\end{pmatrix}$,

$\exp(t\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix})=\exp(\begin{pmatrix}0&t\\0&0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&t\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}$

従って、$\exp(t\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}e^{3t}&0\\0&e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{3t}&te^{3t}\\0&e^{3t}\end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix}5&-4\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}$ に対して行列の指数関数 e^{tA} を計算せよ。

解答例 $tA=P(tB)P^{-1}$ のとき、$e^{tA}=Pe^{tB}P^{-1}$ となるから、

$e^{tA}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{3t}&0\\0&e^{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2e^{3t}-e^{t}&-2e^{3t}+2e^{t}\\e^{3t}-e^{t}&-e^{3t}+2e^{t}\end{pmatrix}$

(3) 次の常微分方程式の初期値問題を解け（(2) を用いてよい)。

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = 5x_1 - 4x_2$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = 2x_1 - x_2$$
$$x_1(0) = 2, x_2(0) = 1$$

解答例 $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ に対して、$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{tA}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ が解。

(2) の計算から、$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{tA}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$

(4) 次の常微分方程式の初期値問題を解け。

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -4x_1 + 3x_2$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -3x_1 - 4x_2$$
$$x_1(0) = 2, x_2(0) = 1$$

解答例 行列 $A = \begin{pmatrix} -4 & +3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ の固有値は $-4 \pm 3i$ であるが、これはそのような固有値をもつ行列のうち特別な形ものである。

この A に対して、$\exp(tA) = e^{-4t}\begin{pmatrix} \cos(-3t) & -\sin(-3t) \\ \sin(-3t) & \cos(-3t) \end{pmatrix} = e^{-4t}\begin{pmatrix} \cos 3t & \sin 3t \\ -\sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix}$

となる。従って、

$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{tA}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-4t}\begin{pmatrix} \cos 3t & \sin 3t \\ -\sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4t}(2\cos 3t + \sin 3t) \\ e^{-4t}(-2\sin 3t + \cos 3t) \end{pmatrix}$

参考

この行列 $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ を複素数の範囲で対角化すると、

$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4+3i & 0 \\ 0 & -4-3i \end{pmatrix}$ となる。

従って、$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{(-4+3i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-4-3i)t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^{-1}$

$= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{(-4+3i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-4-3i)t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -ie^{(-4+3i)t} & -e^{(-4+3i)t} \\ -ie^{(-4-3i)t} & e^{(-4-3i)t} \end{pmatrix}$

$= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} -ie^{(-4+3i)t} - ie^{(-4-3i)t} & -e^{(-4+3i)t} + e^{(-4-3i)t} \\ e^{(-4+3i)t} - e^{(-4-3i)t} & -ie^{(-4+3i)t} - ie^{(-4-3i)t} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \dfrac{e^{(-4+3i)t} + e^{(-4-3i)t}}{2} & \dfrac{e^{(-4+3i)t} - e^{(-4-3i)t}}{2i} \\ \dfrac{-e^{(-4+3i)t} + e^{(-4-3i)t}}{2i} & \dfrac{e^{(-4+3i)t} + e^{(-4-3i)t}}{2} \end{pmatrix}$

$= e^{-4t}\begin{pmatrix} \cos 3t & \sin 3t \\ -\sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix}$

問題３． a_1, a_2 を実数、$b(t)$, $c(t)$ を実数値関数とする。
２階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2x = b(t)$ の解 $u(t)$,
２階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2x = c(t)$ の解 $v(t)$, 実数 k, ℓ に対して、
$w(t) = ku(t) + \ell v(t)$ は２階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2x = kb(t) + \ell c(t)$ の解であることを示せ。

解答例
$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + a_2w \\
&= \frac{\mathrm{d}^2(ku+\ell v)}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}(ku+\ell v)}{\mathrm{d}t} + a_2(ku+\ell v) \\
&= (k\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \ell\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}) + a_1(k\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \ell\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}) + a_2(ku+\ell v) \\
&= k(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + +a_2u) + \ell(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + a_1\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + a_2v) = kb(t) + \ell c(t)
\end{aligned}
$$