**６月１４日**

# 常微分方程式の講義（担当：坪井　俊）の小テスト

**注意。　筆記用具以外の持込は認めません。この小テストの成績は、期末試験の成績が悪い場合に考慮します。この小テストの出来が非常に悪いと思った人は６月２８日までにレポートとして提出すれば、多少考慮します。**

**問題１．** (1) 変数分離形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (3x^2-1)(y-1)(y+1)$ の一般解を求めよ。

(2) 変数分離形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y-1)y\cos x$ の $y(0) = \dfrac{1}{2}$ となる解を求めよ。

(3) 微分形式 $y^2\mathrm{d}x + (2-xy)\mathrm{d}y$ は２変数関数 $f(x,y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ となるかどうか判定せよ。

(4) 上記 (3) の微分形式に $\dfrac{1}{y^3}$ をかけて得られる微分形式 $\dfrac{1}{y}\mathrm{d}x + \dfrac{2-xy}{y^3}\mathrm{d}y$ は２変数関数 $f(x,y)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ となるかどうか判定せよ。

(5) $t>0$ に対して定義された１階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 2\dfrac{x}{t} = t^3$ の $x(1)=1$ となる解を求めよ。

**問題２．** (1) 行列の指数関数 $e^{tA}$ の定義を書き、行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対して、$e^{tA}$ を計算せよ。

(2) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ に対して行列の指数関数 $e^{tA}$ を計算せよ。

(3) 次の常微分方程式の初期値問題を解け（(2) を用いてよい)。

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = 5x_1 - 4x_2$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = 2x_1 - x_2$$
$$x_1(0) = 2, x_2(0) = 1$$

(4) 次の常微分方程式の初期値問題を解け。

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -4x_1 + 3x_2$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -3x_1 - 4x_2$$
$$x_1(0) = 2, x_2(0) = 1$$

**問題３．** $a_1$, $a_2$ を実数、$b(t)$, $c(t)$ を実数値関数とする。

２階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2x = b(t)$ の解 $u(t)$,

２階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2x = c(t)$ の解 $v(t)$, 実数 $k$, $\ell$ に対して、

$w(t) = ku(t) + \ell v(t)$ は２階線形常微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_2x = kb(t) + \ell c(t)$ の解であることを示せ。