

2変数1階線形同次微分方程式

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ について、線形の微分方程式 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$, すなわち

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ あるいは } \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \text{ を考える。}$$

微分方程式を簡単にするために平面上の線形な座標変換を考える。2行2列の行列 $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ により、 $\vec{x} = P\vec{y}$ 、つまり、 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ で

$\det P = p_{11}p_{22} - p_{21}p_{12} \neq 0$ とする。 P は一定の行列と考えているので、 $\frac{d\vec{x}}{dt} = P\frac{d\vec{y}}{dt}$.

従って、微分方程式は、 $P\frac{d\vec{y}}{dt} = AP\vec{y}$ と変形される。 P の逆行列 P^{-1} を用いて正規

形に書き直せば、 $\frac{d\vec{y}}{dt} = P^{-1}AP\vec{y}$ となる。

問題は、 $P^{-1}AP$ を簡単にするることである。

この問題は、行列 A の固有値を考えることで、いくつかの場合に分かれる。

固有値とは、固有多項式

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21}$$

の解のことである。これは、実数係数の2次方程式であるから、固有値の可能性としては、異なる2つの実数、1つの実数、共役複素数の3通りがある。

(1) A の固有値が異なる2つの実数 λ_1, λ_2 の場合。

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda_1 - a_{22} \end{pmatrix} \text{ の行列式は } 0 \text{ だから、} \begin{pmatrix} \lambda_1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda_1 - a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる0ではないベクトル(固有ベクトル) $\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ が存在する。関係式を書き換えると

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$$

である。 λ_2 に対する固有ベクトルを $\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$$

である。これらの式は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

とまとめられる。従って $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ により、 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ となる。

微分方程式は、 $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 、すなわち $\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \lambda_1 y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = \lambda_2 y_2 \end{cases}$ となる。従っ

て、一般解は $\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$ となる。 $t = 0$ で $\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$ を通る解は、

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

$x_1 x_2$ 座標では、

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} C_1 e^{\lambda_1 t} + p_{12} C_2 e^{\lambda_2 t} \\ p_{21} C_1 e^{\lambda_1 t} + p_{22} C_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

が一般解である。 $t = 0$ で $\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$ を通る解は、 $\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$ だから、

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}、\text{ 従って } \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

となる。

例。 $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ について、固有多項式は

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 6 \\ -3 & \lambda + 5 \end{pmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda + 5) + 6 \cdot 3 = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$$

固有値 1 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 、固有値 -2 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

従って、 $A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ である。 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおく

と、 $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 。 $t = 0$ のときに $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$ となる解は

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}。 \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} \text{ とすると、}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{-2t} \\ e^t & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^t - e^{-2t} & -2e^t + 2e^{-2t} \\ e^t - e^{-2t} & -e^t + 2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) A の固有値が共役複素数 $\lambda, \bar{\lambda}$ の場合。

μ, ν を実数として $\lambda = \mu + i\nu$ とするとき、まず A が行列 $\begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$ の場合を考える。この A の固有多項式は $\lambda^2 - 2\mu\lambda + \mu^2 + \nu^2 = 0$ で固有値は $\lambda = \mu + i\nu, \bar{\lambda} = \mu - i\nu$ である。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

複素数 $y_1 + iy_2$ を考えると、

$$\frac{d(y_1 + iy_2)}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + i \frac{dy_2}{dt} = \mu y_1 - \nu y_2 + i(\nu y_1 + \mu y_2) = (\mu + i\nu)(y_1 + iy_2)$$

を満たす。 $\frac{dz}{dt} = \lambda z$ の解は、 $e^{\lambda t} z^0$ であったが、この $e^{\lambda t}$ のテーラー展開

$$e^{\lambda t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lambda t)^n$$

は、複素数 λ に対しても収束しており、 $\frac{d}{dt} e^{\lambda t} z^0 = \lambda e^{\lambda t} z^0$ は、複素数 λ 、 z^0 に対しても成立している。

$$\begin{aligned} y_1 + iy_2 &= e^{(\mu+i\nu)t} (y_1^0 + iy_2^0) = e^{\mu t} e^{i\nu t} (y_1^0 + iy_2^0) \\ &= e^{\mu t} (\cos \nu t + i \sin \nu t) (y_1^0 + iy_2^0) \end{aligned}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\mu t} (y_1^0 \cos \nu t - y_2^0 \sin \nu t) \\ y_2 &= e^{\mu t} (y_1^0 \sin \nu t + y_2^0 \cos \nu t) \end{aligned}$$

となる。あるいは、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\mu t} \cos \nu t & -e^{\mu t} \sin \nu t \\ e^{\mu t} \sin \nu t & e^{\mu t} \cos \nu t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$$

と書かれる。

一般の $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対して、固有多項式が、 $\lambda^2 - 2\mu\lambda + \mu^2 + \nu^2 = 0$ ($\nu \neq 0$) となっているとする。

ハミルトン・ケイレイの定理から、次が成立する。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^2 - 2\mu \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + (\mu^2 + \nu^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ として任意のベクトルをとる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$$

となる $\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ を探しているのだから、 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ を満たす $\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ をとる。すなわち、 $\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\nu} \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} \right\}$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\nu} \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{\nu} \left\{ \left(2\mu \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - (\mu^2 + \nu^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} \right\} \\ &= -\nu \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} + \frac{\mu}{\nu} \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} \right\} \right\} = -\nu \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

こうして得られた $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ により、 $P^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$ となり、 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおくと、 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ についての微分方程式は

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

となる。この微分方程式の解は

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\mu t} \cos \nu t & -e^{\mu t} \sin \nu t \\ e^{\mu t} \sin \nu t & e^{\mu t} \cos \nu t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$$

である。 $x_1 x_2$ 座標では

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e^{\mu t} \cos \nu t & -e^{\mu t} \sin \nu t \\ e^{\mu t} \sin \nu t & e^{\mu t} \cos \nu t \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

となる。

例。 $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -13 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} -3 & -13 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ について、固有多項式は

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + 3 & 13 \\ -2 & \lambda - 7 \end{pmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda - 7) + 2 \cdot 13 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - 2 - i)(\lambda - 2 + i)$$

となる。 $\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ として、

$$\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \left\{ \begin{pmatrix} -3 & -13 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} -3 & -13 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおくと、 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \cos t & -e^{2t} \sin t \\ e^{2t} \sin t & e^{2t} \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} \cos t & -e^{2t} \sin t \\ e^{2t} \sin t & e^{2t} \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

すなわち、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \cos t - 5e^{2t} \sin t & -13e^{2t} \sin t \\ 2e^{2t} \sin t & e^{2t} \cos t + 5e^{2t} \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

(3) A の固有値が 1 つの実数 λ の場合。

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$$

をみたく。ここで、 $\det \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \neq 0$ となるように、 $\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ をとると、 $\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ は基底となるから)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$$

をみたく b, c がある。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

A と $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ の固有多項式は一致する。

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - P^{-1}AP) &= \det(\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(\lambda I - A)P) \\ &= \det P^{-1} \det(\lambda I - A) \det P = \det(\lambda I - A) \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ の固有値は λ, c であるから、固有値が 1 つの実数 λ の場合は $c = \lambda$ である。

$b = 0$ ならばスカラー行列で、 $A = \lambda I$ であったことになり、 $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$ となる。

$b \neq 0$ とする。固有ベクトル $\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ を $b \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$ に取り替えると、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$$

となる ($b = 1$ にとることができる) から、この新しい $\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ で $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ と座標変換すると微分方程式は、 $y_1 y_2$ 座標で

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

となるが、これは y_2 については解ける形である。 $y_2(t) = e^{\lambda t} y_2^0$ となるが、このとき、 y_1 についての方程式は線形非同次方程式である。

$$\frac{dy_1}{dt} = \lambda y_1 + y_2(t) = \lambda y_1 + e^{\lambda t} y_2^0$$

このような方程式の解は、定数変化法により、 $y_1(t) = C(t)e^{\lambda t}$ の形で求められるのであった。これを代入すると

$$\frac{dC}{dt} e^{\lambda t} + \lambda C(t) e^{\lambda t} = \lambda C(t) e^{\lambda t} + e^{\lambda t} y_2^0$$

すなわち、 $\frac{dC}{dt} = y_2^0$ だから、 $C(t) = y_2^0 t + y_1^0$ となる。従って、

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} (y_2^0 t + y_1^0) \\ e^{\lambda t} y_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & e^{\lambda t} t \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$$

$x_1 x_2$ 座標では

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & e^{\lambda t} t \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

となる。

$$\text{例。} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ について、固有多項式は

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + 7 & -9 \\ 4 & \lambda - 5 \end{pmatrix} = (\lambda + 7)(\lambda - 5) + 9 \cdot 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

となる。固有値 -1 に対する固有ベクトルは、 $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ である。これと線形独立 (1 次独立) なベクトル、例えば、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をとると、 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を得る。ここで、 $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$ にとりかえて、

$$\begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を得る。 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおくと、 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

すなわち、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6e^{-t} + e^{-t} & 9e^{-t} \\ -4e^{-t} & 6e^{-t} + e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$$

参考。[YE] p. 84–97.