3. 4月２７日

不変な多変数関数が見つかる場合（全微分方程式）

２変数関数の偏微分

$f(x,y)$ について、x についての偏微分を $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, y についての偏微分を $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ で表す。

x, y が t の関数 $x(t)$, $y(t)$ であるとき、
$\dfrac{\mathrm{d}f(x(t),y(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t)$ となる。

y が x の関数 $y(x)$ であれば、
$\dfrac{\mathrm{d}f(x,y(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y(x)) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)$ となる。

$\mathrm{d}f(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}y$ の形の式を $f(x,y)$ の全微分とよぶ。

$g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y$ の形のものを１次微分形式または微分１形式とよぶ。与えられた微分１形式 $g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y$ に対して、それが $\mathrm{d}f(x,y)$ の形のものかどうかを問う問題が考えられる。

これは、$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = h(x,y)$ をともに満たす f を求める問題である。

f が２回連続微分可能であれば、$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ であるから、
$\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y)$ であることが必要である。これを積分可能条件と呼ぶ。

これに対して、平面上で定義された連続微分可能関数 $g(x,y)$, $h(x,y)$ についてはこの条件 $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y)$ 十分条件であることが知られている。

実際、そのような $f(x,y)$ があれば、
$f(x,y) - f(0,0) = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}f(xt,yt)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \{\dfrac{\partial f}{\partial x}(xt,yt)x + \dfrac{\partial f}{\partial x}(xt,yt)y\}\mathrm{d}t$ を満たすから、積分可能条件を満たす微分１形式 $g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y$ に対して、
$f(x,y) = \displaystyle\int_0^1 \{g(tx,ty)x + h(tx,ty)y\}\mathrm{d}t$ とすればよい。

実際
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^1 \{g(tx,ty)x+h(tx,ty)y\}\mathrm{d}t = \int_0^1 \{g(tx,ty)+\dfrac{\partial g}{\partial x}(tx,ty)tx+\dfrac{\partial h}{\partial x}(tx,ty)ty\}\mathrm{d}t =$
$\Big[g(tx,ty)t\Big]_{t=0}^{t=1} - \displaystyle\int_0^1 \{\dfrac{\partial g}{\partial x}(tx,ty)x+\dfrac{\partial g}{\partial y}(tx,ty)y\}t\mathrm{d}t + \int_0^1 \{\dfrac{\partial g}{\partial x}(tx,ty)tx+\dfrac{\partial h}{\partial x}(tx,ty)ty\}\mathrm{d}t =$
$g(x,y)$

問。$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\displaystyle\int_0^1 \{g(tx,ty)x + h(tx,ty)y\}\mathrm{d}t = h(x,y)$ を示せ。

積分可能条件を満たしていることがわかる微分１形式と見て、常微分方程式が解ける場合がある。

例。$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2x - 3x^2y}{x^3 - 2y}$.

これを全微分方程式の形にすると $(-3x^2y + 2x)\mathrm{d}x + (2y - x^3)\mathrm{d}y = 0$

$\dfrac{\mathrm{d}(-3x^2y + 2x)}{\mathrm{d}y} = \dfrac{\mathrm{d}(2y - x^3)}{\mathrm{d}x}$ だから、

$\displaystyle\int_0^1 \{(-3x^2yt^3 + 2xt)x + (2yt - x^3t^3)y\}\mathrm{d}t = -3x^3y\frac{1}{4} + 2x^2\frac{1}{2} + 2y^2\frac{1}{2} - x^3y\frac{1}{4} = y^2 - x^3y + x^2$

$y^2 - x^3y + x^2 = C$ すなわち、$y = \dfrac{1}{2}\{x^3 \pm \sqrt{x^6 - 4(x^2 - C)}\}$ が解である。

問　[YE] p.48 問 2.5

常微分方程式

常微分方程式は、x を変数、y を x の関数とするとき、x, y, $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $y'' = \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, $\ldots$, $y^{(n)} = \dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$ の間の関係式

$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, あるいは $F(x, y, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \ldots, \dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}) = 0$ で与えられる。

n を常微分方程式の階数と呼ぶ。

常微分方程式の解

$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ を満たす x 関数 $y = f(x)$ を解と呼ぶ。

他に条件がない場合は通常、任意定数あるいは積分定数を n 個含む。その場合、一般解と呼ぶ。

x_0 における値 $f(x_0)$ が定まっている等の条件から、任意定数の値が定まると、1 つの関数が定まるが、これを特殊解と呼ぶ。

一般解から、定数の値を定めるだけでは得られない解を持つこともあり、これを特異解と呼ぶ。

特異解の例 $y = 2x$ に接する放物線族。

$y = (x - (a-1))^2 + 2a - 1$ は、$y' = 2(x - (a-1))$ だから、$y = \dfrac{(y')^2}{4} + 2x - y' + 1$ を満たす。

$y - 2x = \dfrac{(y'-2)^2}{4}$ から $y - 2x = z$ とおくと $4z = (z')^2$. $z' = 2\sqrt{z}$, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}z}{2\sqrt{z}} = \int \mathrm{d}x$. $\sqrt{z} = x + C$, 従って、$y - 2x = (x + C)^2$. 積分定数を取り替えてもとの式を得る。一方、$y = 2x$ も解である。

参考　[YE] p.18-22.