

不定積分を使って解ける常微分方程式

合成関数の微分

x を変数とする関数 $f(x)$ について、 x が変数 t の関数 $x(t)$ となっていると、

$$\frac{df(x(t))}{dt} = \frac{df}{dx}(x(t)) \frac{dx}{dt}(t) = f'(x(t))x'(t) \text{ となる。}$$

$$\text{逆に、置換積分 } f(x(b)) - f(x(a)) = \int_{x(a)}^{x(b)} \frac{df}{dx} dx = \int_a^b \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} dt \text{ となる。}$$

変数分離形 $y' = X(x)Y(y)$.

例： $\frac{du}{dt} = (1-u)u$. logistic 方程式。

$$\frac{1}{(1-u)u} \frac{du}{dt} = 1 \text{ だから両辺を積分して } \int_0^t \frac{1}{(1-u)u} \frac{du}{dt} dt = \int_0^t 1 dt$$

$$\frac{1}{(1-u)u} = \frac{1}{u} + \frac{1}{1-u} \text{ であり、この } u \text{ の関数の不定積分は}$$

$\log|u| - \log|1-u| = \log\left|\frac{u}{1-u}\right|$ であるから、

$$\int_0^t \frac{1}{(1-u)u} \frac{du}{dt} dt = \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{1}{(1-u)u} du = \log\left|\frac{u(t)}{1-u(t)}\right| - \log\left|\frac{u(0)}{1-u(0)}\right| = t.$$

すなわち、 $\frac{u(t)}{1-u(t)} \frac{1-u(0)}{u(0)} = \pm e^t$. ここで $t=0$ で $u = u(0)$ だから、 \pm は $+$ の方をとる。

$$\frac{u(t)}{1-u(t)} = \frac{u(0)}{1-u(0)} e^t.$$

$$u(t) = \frac{u(0)}{1-u(0)} e^t (1-u(t)).$$

$$\left(1 + \frac{u(0)}{1-u(0)} e^t\right) u(t) = \frac{u(0)}{1-u(0)} e^t$$

$$u(t) = \frac{u(0)e^t}{1-u(0) + u(0)e^t}$$

解は、 $0 < u(0) < 1$ ならば、 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 1$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 0$.

$u(0) > 1$ ならば、 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 1$, $\lim_{t \rightarrow \log \frac{u(0)-1}{u(0)}} u(t) = +\infty$.

$u(0) < 1$ ならば、 $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \log \frac{u(0)-1}{u(0)}} u(t) = -\infty$.

反省。不定積分として $\int \frac{1}{(1-u)u} du = \int 1 dt$ だから、

$$\log\left|\frac{u(t)}{1-u(t)}\right| = t + C.$$

C を取り替えて、 $\frac{u(t)}{1-u(t)} = Ce^t$ として、 $C = \frac{u(0)}{1-u(0)}$ である。

$$\text{ゆえに、 } u(t) = \frac{Ce^t}{1+Ce^t} = \frac{u(0)e^t}{1-u(0)+u(0)e^t}.$$

このように不定積分を積分定数を適当において定め、あとで積分定数を定める方が効率的かもしれない。

問。 [YE], p. 27.

問。 変数分離形の微分方程式 $\frac{dy}{dx} = X(x)Y(y)$ の解法をまとめよ。 ([YE], p. 23–25)

同次形

$$\text{例。 } \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y} = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

$$z = \frac{y}{x} \text{ とおく。 } y = zx \text{ だから、 } \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}x + z.$$

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{1-z}{1+z} - z = \frac{1-2z-z^2}{1+z}$$

$$\frac{1-2z-z^2}{1+z} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\int_{x_0}^x \frac{1+z}{1-2z-z^2} \frac{dz}{dx} dx = \int_{x_0}^x \frac{1}{x} dx.$$

$$\int_{x_0}^x \frac{1+z}{1-2z-z^2} \frac{dz}{dx} dx = \int_{z(x_0)}^z (x) \frac{1+z}{1-2z-z^2} dz \text{ について、 } w = 1-2z-z^2 \text{ とす}$$

ると、 $dw = -2(1+z)dz$.

$$\text{だから、左辺} = \int_{w(z(x_0))}^{w(z(x))} -\frac{1}{2} \frac{1}{w} dw = -\frac{1}{2} (\log |w(z(x))| - \log |w(z(x_0))|).$$

$$\log |1-2z(x)-z(x)^2| - \log |1-2z(x_0)-z(x_0)^2| = -2(\log |x| - \log |x_0|)$$

$$\frac{1-2z(x)-z(x)^2}{1-2z(x_0)-z(x_0)^2} = \pm \frac{x_0^2}{x^2}. \text{ ここで } \pm \text{ は } + \text{ をとる。}$$

$$1-2z(x)-z(x)^2 = \frac{x_0^2}{x^2} (1-2z(x_0)-z(x_0)^2). \text{ ここで } \pm \text{ は } + \text{ をとる。}$$

$$1-2\frac{y(x)}{x} - \frac{y(x)^2}{x^2} = \frac{x_0^2}{x^2} \left(1-2\frac{y(x_0)}{x_0} - \frac{y(x_0)^2}{x_0^2}\right).$$

$$x^2 - 2xy - y^2 = x_0^2 - 2x_0y(x_0) - y(x_0)^2$$

同じ反省。

$$\text{不定積分として } \int \frac{1+z}{1-2z-z^2} dz = \int \frac{1}{x} dx \text{ だから、}$$

$$-\frac{1}{2} \log |1-2z-z^2| = \log |x| + C.$$

$$\text{従って、別の } C \text{ に取り替えて } (1-2z-z^2)x^2 = C.$$

$$\text{すなわち、 } x^2 - 2xy - y^2 = C.$$

問 [YE] p.28 例題. [YE] p. 34 問 (1)

問 同次形の微分方程式 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ の解法についてまとめよ。 [YE] p.27–28.

1 階線形常微分方程式

例。 $\frac{dy}{dx} + xy = x$.

y と $\frac{dy}{dx}$ について、関数を係数として線形になっている。

まず、 $\frac{dy}{dx} + xy = 0$ を解く。線形な場合の常套手段。

これは変数分離形だから、 $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -x$ を積分して $\int \frac{1}{y} dy = - \int x dx$.

つまり $\log |y| = -\frac{x^2}{2} + C$.

C を取り替えて、 $y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$.

もとの方程式の解を $y = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ の形で探す。定数変化法という。

これを代入すると、 $\frac{dC}{dx} e^{-\frac{x^2}{2}} + C \frac{de^{-\frac{x^2}{2}}}{dx} + xCe^{-\frac{x^2}{2}} = x$

すなわち、 $\frac{dC}{dx} e^{-\frac{x^2}{2}} = x$ を得る。

$\frac{dC}{dx} = xe^{\frac{x^2}{2}}$ だから、 $C(x) = \int xe^{\frac{x^2}{2}} dx = e^{\frac{x^2}{2}} + C_1$

従って、 $y = (e^{\frac{x^2}{2}} + C_1)e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + C_1e^{-\frac{x^2}{2}}$.

問 [YE] p.35 例題。 [YE] p.40 問 (1).

問 1 階線形微分方程式 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ について、解法をまとめよ。 [YE]
p.34–35.