曲面の積分幾何

小林 俊行　　　　　　　　　　東大・数理

多様体 M と 測度つき部分多様体の族 (N_λ, μ_λ) $(\lambda \in \Lambda)$ が与えられたとき積分変換

$$R\colon C_0^\infty(M) \to C(\Lambda), \qquad f \mapsto Rf(\lambda) = \int_{N_\lambda} f(x)\, d\mu_\lambda(x)$$

が定義される。例えば, $M = \mathbb{R}^n$, N_λ が超平面 のとき R はラドン変換 (1917 年の Radon の論文にちなむ), $M = \mathbb{R}^n$, N_λ が一次元 のとき R は X 線変換 (X 線トモグラフィによる応用にちなむ) と呼ばれる。R が単射であるとき, その逆公式を求める, すなわち,「部分多様体での積分の値からもとの関数を復元する」という問題は約８０年前に Funk 及び Radon によって提唱されて以来, Gelfand 学派を中心に多くの研究があり種々の設定で R の逆変換の公式が得られている。

この談話会の前半では, 個々のケースで R の逆変換の公式を求めるのではなく, 部分多様体「すべて」の作る無限次元多様体上で逆変換の普遍公式を与え, 個々のケースはその普遍公式の「制限」で逆変換が解釈できることを解説する。

談話会の後半では, 非可換調和解析への応用を述べる。古典的な調和解析であるフーリエ級数やフーリエ変換は $L^2(S^1)$ や $L^2(\mathbb{R})$ を可換群 S^1 や $\mathbb{R}$ の既約ユニタリ表現に分解することと考えられる. 非可換調和解析, すなわちリー群が推移的に作用している多様体 (等質多様体) の大域解析においては, その上の 2 乗可積分関数のつくるヒルベルト空間を既約ユニタリ表現に分解する定理 (Plancherel 型定理) を得ることが重要な基本問題となる. この Plancherel 型定理を求める手法を歴史的に見ると, 1950 年代から 60 年代の黎明期には積分幾何が主要な役割を果たしたが, 70 年代以降になると積分幾何の手法は様々な点で行き詰まり, 最近では対称空間の場合を中心に線型偏微分方程式の手法 (Weyl-小平-Titchmarsh の展開定理の偏微分作用素への拡張とも解釈できる) が盛んになっている。「普遍的な逆公式」の応用として, 積分幾何による昔の手法を再び見直し, 特に既約表現の重複度が無限になる場合を含めた複素等質多様体の調和解析への新しい応用にふれる。