

教授 (Professor)

小林 俊行 (KOBAYASHI Toshiyuki)

## A. 研究概要

### 1. 極小表現の幾何・解析的研究

極小表現は, すべてのユニタリ表現の中で最も根源的な対象であると考えられ, 1990年代より多くの代数的研究がなされている. 筆者は  $D$  型単純群の極小表現に焦点を当て, 1つの極小表現の異種の幾何的モデルを構築することによって, それらが数学の異なる分野と結びつくような理論構成を目指し, この数年間で約 600 頁の論文を著してきた. 今年度の主な結果は以下の 5 つである.

1.A. (シュレーディンガーモデル) ジョルダン代数の共形変換群の枠組で, 極小表現の  $L^2$ -モデルを構築した ([arXiv:1106.3621]). さらに, 二次錐上にフーリエ変換に相当するユニタリ反転変換を導入し, その明示形を与え, これによって不定値直交群の極小表現の Schrödinger モデル ([Adv. Math. 2003]) の大域公式を与えた (著書 [14]).

1.B. (フーリエ変換の変形理論)  $C$  型単純群の極小表現である Weil 表現と  $D$  型単純群の極小表現を連続的に結びつける “対称性の破れ” を定義し, 特殊値が Fourier 変換, Hankel 変換, Dunkl 変換, Hermite 半群, Laguerre 半群となるような 3 パラメータをもつ作用素を構成し, Heisenberg の不確定性原理や Weyl 代数の一般化などの統一的証明を与えた ([13], 口頭発表 [6]).

1.C. (特殊関数) 極小表現から自然に生じる 4 階の微分方程式を満たす “特殊関数論”, “特殊多項式” の基礎的性質を研究した [10,11,12].

1.D. (関口対応の量子化) euclid Jordan 代数の共形変換群に対して極小冪零軌道に関する関口対応の量子化に成功した ([arXiv:1203.5462]).

1.E. (極小表現の分岐則)  $A$  型の ‘極小表現’ を半単純対称群に制限した時の分岐則を解析的手法で完全に決定した (M. Pevzner 氏等と共同) [2].

### 2. 可視的作用と無重複表現

複素多様体における可視的な作用という概念と無重複性の伝播という視点を導入し, 無限次元の場合および (組合せ論が絡む) 有限次元の場合を同時に含む, 無重複表現の統一的な理論をめざしている ([5]).

### 3. 不連続群

私の長年のモチーフである非リーマン空間における不連続群に関して, スペクトル理論の立場で

新たな研究を行い, その第一歩となる論文を発表した ([7], 口頭発表 [1]).

### 4. 分岐則の理論

誘導表現の有限重複度に関する幾何的条件や分岐則の有限性の判定条件を著した (T. Oshima と共同 [arXiv:1108.3477]). また, カテゴリーにおいて分岐則の問題が well-posed であるかについての問題を提起し, その幾何的判定条件を決定した [4]. さらに, Zuckerman 加群や極小表現等を対称対に制限した時に離散的に分解する場合を完全に分類し大島芳樹氏と共同で発表した [arXiv:1104.4400, arXiv:1202.5743]. ユニタリ表現論の分岐則に関して, 最新の結果と予想を Zuckerman 60 歳記念の論文集に著した [6].

### 5. 実解析

5.A. 古典的な Weyl calculus を高次元化し, その積の明示公式を決定した (A. Unterberger 氏等と共同研究) [JFA 2009].

5.B. 対称性の高いマルチプライヤー作用素を全て捕捉する代数的枠組みを与え, その  $L^p$  有界性や二次超曲面上の大域解析との関係を A. Nilsson 氏と共同で研究した [Math Z 2008, Ark Math 2009].

5.C. 無限次元表現における無重複分岐則をモチーフとして, J.-L. Clerc 氏等と共同で  $n$  次元球面の 3 重直積  $S^n \times S^n \times S^n$  上のある有理関数の積分値を具体的に決定した ( $n = 1$  の場合が Bernstein-Reznikov 積分となる) [1].

### 1. Analysis on minimal representations

Minimal representations are one of building blocks of unitary representations. Classic examples are the Weil representation, and intensive algebraic studies have been made since 1990s by many experts. Aiming for yet another *geometric approach* to minimal representations, in particular of type  $D$ , I have applied conformal techniques, got a new construction of minimal representations since 1991, found conserved quantities for ultra-hyperbolic equations that led us to their unitarizability, and also proved the existence of a *Schrödinger model* ( $L^2$ -model) with B. Ørsted. With G. Mano ([14]), we determined an explicit form of the *unitary inversion operator* on the  $L^2$ -model on the isotropic cones, that generalizes the Euclidean Fourier transform. We proposed

also an original deformation theory in [13]. I also discovered “special functions” satisfying a certain ordinary differential equation of *order four* with G. Mano, Hilgert, and Möllers in [10,11,12]. We also have constructed an analogue of the Schrödinger model and the Fock model for other simple groups in the framework of the Jordan algebra [arXiv:1106.3621].

### 2. Multiplicity-free representations

I gave a plenary lecture in Winter School (Czech) on systematic and synthetic applications of the original theory of *visible actions* on complex manifolds to multiplicity-free theorems, in particular, branching problems to symmetric pairs.

### 3. Discontinuous groups

Developing my continuing motif on discontinuous groups for non-Riemannian homogeneous spaces, I initiated the study on discrete spectrum on locally non-Riemannian symmetric spaces with F. Kassel [1].

### 4. Restriction of representations

The paper [arXiv:1108.3477] discusses a theory of real spherical variety, and giving a geometric criterion for finiteness multiplicities in the induced/restricted representations. Together with Y. Oshima, I accomplished the classification of the triple  $(\mathfrak{q}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  such that Zuckerman’s derived functor modules  $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$  decompose discretely with respect to a reductive symmetric pair  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  in [arXiv:1104.4400] and also some other small representations in [arXiv:1202.5743]. I also extended the theory to the category  $\mathcal{O}$  in [4].

### 5. Real analysis - $L^p$ multipliers

5.A. We generalized the classic Weyl calculus to high dimensions, and found explicitly the composition formula with B. Ørsted, M. Pevzner and A. Unterberger ([JFA 2009]).

5.B. Inspired by the idea of prehomogeneous spaces, I studied multipliers with high symmetries with Nilsson ([Math Z 2008], [Ark Math 2009]).

5.C. I found an explicit formula of the integral of invariant meromorphic functions on  $S^n \times S^n \times S^n$  in a joint work with Clerc, Ørsted, and Pevzner [1].

## B. 発表論文

1. J.-L. Clerc, T. Kobayashi, B. Ørsted, and M. Pevzner, “Generalized Bernstein–Reznikov integrals”, *Mathematische Annalen* **349** (2011), 395–431.
2. T. Kobayashi, B. Ørsted, and M. Pevzner, “Geometric analysis on small unitary representations of  $GL(n, \mathbb{R})$ ”, *J. Funct. Anal.* **260** (2011), 1682–1720.
3. T. Kobayashi, “Algebraic analysis of minimal representations”, *Publ. RIMS (Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences)* **47** (2011), 585–611, Special issue in commemoration of the golden jubilee of algebraic analysis.
4. T. Kobayashi, “Restrictions of generalized Verma modules to symmetric pairs”, to appear in *Transformation Groups* (2012), 31 pp. (published on line first, DOI: 10.1007/s00031-012-9180-y).
5. T. Kobayashi, “Propagation of multiplicity-free property for holomorphic vector bundles”, to appear in the volume in honor of J. Wolf for his seventy-fifth birthday, *Progr. Math.* Birkhäuser, 32 pp.
6. T. Kobayashi, “Branching problems of Zuckerman derived functor modules”, *Representation Theory and Mathematical Physics (in honor of Gregg Zuckerman)* (J. Adams, B. Lian, and S. Sahi, eds.), *Contemporary Mathematics*, vol. 557, *アメリカ数学会*, 2011, pp. 23–40.
7. F. Kassel and T. Kobayashi, “Stable spectrum for pseudo-Riemannian locally symmetric spaces”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **349** (2011), 29–33.
8. T. Kobayashi, “Geometric quantization, limits, and restrictions—some examples for elliptic and nilpotent orbits”, *Geometric Quantization in the Non-compact Setting* (L. Jeffrey, X. Ma, and M. Vergne, eds.), *Oberwolfach Reports*, vol. 8, 2011,

European Mathematical Society, Publishing House, pp. 466–469.

9. T. Kobayashi, “Geometric analysis on minimal representations”, Ninth Oka Symposium Lecture Notes (J. Matsuzawa and S. Tsunoda, eds.), Department of Mathematics, Faculty of Science, Nara Women’s University, 2011, pp. 27–61.
10. J. Hilgert, T. Kobayashi, G. Mano, and J. Möllers, “Special functions associated to a certain fourth order differential equation”, Ramanujan Journal **26** (2011), 1–34.
11. J. Hilgert, T. Kobayashi, G. Mano, and J. Möllers, “Orthogonal polynomials associated to a certain fourth order differential equation”, Ramanujan Journal **26** (2011), 295–310.
12. T. Kobayashi and J. Möllers, “An integral formula for  $L^2$ -eigenfunctions of a fourth order Bessel-type differential operator”, Integral Transforms and Special Functions **22** (2011), 521–531.
13. S. Ben Saïd, T. Kobayashi, and B. Ørsted, “Laguerre semigroup and Dunkl operators”, to appear in *Compositio Mathematica*, 75 pp.  
[著書]
14. T. Kobayashi and G. Mano, “The Schrödinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group  $O(p, q)$ ”, Mem. Amer. Math. Soc. **212**, no. 1000, アメリカ数学会, 2011 年, vi+132 pp.

### C. 口頭発表

1. Analysis on pseudo-Riemannian locally symmetric spaces. (S. S. Chern 生誕 100 周年記念集会). Mathematical Science Research Institute (MSRI) at Berkeley, California, USA, October 2011.
2. Discrete Spectrum for Non-Riemannian Locally Symmetric Spaces. Cohomology of Arithmetic Groups (M. S. Raghunathan 教授 70 歳記念研究集会). Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai, India, December 2011.
3. Conformally Equivariant Differential Operators and Branching Problems of Verma Modules. Workshop on Geometric Analysis on Euclidean and Homogeneous Spaces (S. Helgason 教授 85 歳記念研究集会). Tufts University, USA, January 2012.
4. Stable Spectrum for non-Riemannian Locally Symmetric Spaces. Lie Groups: Structure, Actions and Representations (J. Wolf 教授 75 歳記念研究集会). Ruhr-Universität, Bochum, Germany, January 2012.
5. 1. Branching problems for unitary representations — analytic aspects; 2. Branching problems for unitary representations — algebraic aspects. (opening lecture), AIM Conference: Branching Problems for Unitary Representations. Max Planck Institute for Mathematics, Bonn, Germany, July 2011.
6. Conformal Geometry, Schrödinger Model of Minimal Representations, and Deformation of Fourier Transforms. (6.A.–6.C. では講演タイトル, 内容は多少異なるが, テーマが同じなので 1 つにまとめる.) 6.A. Geometry and Dynamics Seminar, Université Lille, France, January 2011. 6.B. IX. International Workshop: Lie Theory and Its Applications in Physics. Varna, Bulgaria, June 2011. 6.C. Harmonic Analysis, Deformation Quantization, Noncommutative Geometry. Scalea, Italy, September 2011.
7. Geometric Quantization, Limits, and Restrictions—Some Examples for Elliptic and Minimal Orbits, 7.A. Geometric Quantization in the Non-compact Setting, Oberwolfach, Germany, February 2011; 7.B. (closing lecture), The 10th Workshop on Nilpotent Orbits and Representation Theory (NORTH10), Kyushu University, Japan, February 2011.

8. Conformally Equivariant Differential Operators and Branching Problems of Verma Modules. **8.A.** Workshop on the Interaction of Representation Theory with Geometry and Combinatorics. Hausdorff Institute, Bonn, Germany, March 2011. **8.B.** Special day on Lie groups. Utrecht University, the Netherlands, May 2011. **8.C.** (2 lectures), Representation Theory XII. Dubrovnik, Croatia, June 2011. **8.D.** Lie Groups: Geometry and Analysis (JSPS/DFG seminar). Paderborn, Germany, September 2011.
  9. Finite Multiplicity Theorems. **9.A.** (closing lecture), Seminar Sophus Lie. Erlangen, Germany, July 2011. **9.B.** Analysis on Lie Groups. Max Planck Institute for Mathematics, Bonn, Germany, September 2011. **9.C.** (closing lecture), Lie Groups, Lie Algebras and their Representations (organized by Joseph Wolf). University of California, Berkeley, USA, November 2011., **9.D.** Branching Laws, IMS, Singapore, March, 2012.
  10. Global Geometry and Analysis on Locally Symmetric Spaces—Beyond the Riemannian Case. **10.A.** 談話会, University of Chicago, USA, May 2011. **10.B.** 談話会, IPMU, the University of Tokyo, Japan, December 2011.
- D. 講義
1. 幾何学 XE (大域幾何概論): 大学院・4年共通講義, Equivariant differential operators の構成と無限次元表現論入門
  2. 数学講究 XA: シンプレクティック幾何および指数定理に関して毎週2つのセミナーを開いた. テキスト: R. Berndt "An Introduction to Symplectic Geometry" American Mathematical Society (2000) および Berline-Getzler-Vergne "Heat Kernels and Dirac Operators" Springer (2004) (数理4年生)
  3. 数学 I: 微積分 (文系1・2年生) (聴講者が多かったため, 夜にも開講した)
  4. 数学 II: 線型代数 (演算, 基本変形, ランク, 連立一次方程式, 固有値と固有ベクトル, 外積と内積, 逆行列) (文系1・2年生)
- E. 修士・博士論文
1. (修士) 田中 雄一郎 (TANAKA Yuichiro): Visible actions on flag varieties and a generalization of the Cartan decomposition (旗多様体への可視的作用とカルタン分解の一般化)
  2. (修士) 藤井 雄規 (FUJII Yuki): Geometric approach to analysis on homogeneous spaces — a survey (幾何学的手法による等質空間上の解析 — 概説)
- F. 対外研究サービス
- [ジャーナルのエディター]
1. Managing Editor, Japanese Journal of Mathematics (日本数学会) (2005–)
  2. Editor, International Mathematics Research Notices (Oxford 大学出版) (2002–)
  3. Managing Editor, Takagi Booklet, vol. 1–9 (日本数学会) (2005–)
  4. Editor, Geometriae Dedicata (Springer) (2000–)
  5. Editor, Advances in Pure and Applied Mathematics (de Gruyter) (2008–)
  6. Editor, International Journal of Mathematics (World Scientific) (2004–)
  7. Editor, Journal of Mathematical Sciences, The University of Tokyo (2007–)
  8. Editor, Kyoto Journal of Mathematics (2010–)
  9. Editor in Chief, Journal of Mathematical Society of Japan (日本数学会) (2002–2004; 2004–2006), Editor (1998–2006)
  10. Editor, Publications RIMS (2003–2007)
  11. Editor, Progr. Math. vol. 255 (with W. Schmid, J.-H. Yang), Birkhäuser, 2007

[学会・他大学の委員など]

12. 審査委員: European Research Council (2010-)
13. 日本学会会議連携会員 (2006-2008)
14. 日本数学会理事 (2003-2005; 2005-2007)
15. 日本数学会評議員 (2003-2005; 2005-2007)
16. 京都大学数理解析研究所専門委員 (2007-2009; 2009-2011)
17. 科学研究費等の審査委員: 日本 (JSPS), 米国 (NSF-AMS), ドイツ, ルクセンブルク, 中華人民共和国・香港 (various years)
18. 審査委員: Prize Committee 日本数学会春季賞・秋季賞他 (anonymous) (various years)
19. Jury, Habilitation, Reims University, France (2006)
20. Jury, Doctor of Philosophy, Paderborn University, Germany (2010)
21. Jury, Doctor of Philosophy, Utrecht University, the Netherlands (2011)
22. IPMU(数物宇宙連携機構), 上席科学研究員併任 (2009.8-); 主任研究員併任 (2011.6-)

[国際研究集会のオーガナイザーなど]

23. オーガナイザー, Harmonische Analysis und Darstellungstheorie Topologischer Gruppen, Oberwolfach, Germany, 14-20 October 2007 (B. Krötz, E. Lapid, and C. Torossian)
24. Scientific Committee, Hermitian Symmetric Spaces, Jordan Algebras and Related Problems (conference in honor of Prof. Jean-Louis Clerc), Centre International de Recherches Mathématiques, Luminy, France, 23-27 June, 2008
25. オーガナイザー, 微分方程式と対称空間—大島利雄先生還暦記念研究集会, 東京大学, 2009年1月13-16日 (with H. Matumoto, H. Ochiai and H. Sekiguchi)
26. オーガナイザー, Mathematics: From Today to Tomorrow—Global COE Opening Symposium at Tokyo, 東京大学, 2009年1月30日-2月1日 (with Y. Kawahigashi, Y. Kawamata and T. Saito)
27. オーガナイザー, The 8th Workshop on Nilpotent Orbits and Representation Theory (NORTH 8), 大津, 2009年3月8-11日 (with K. Nishiyama and H. Yamashita)
28. オーガナイザー, GCOE Spring school on representation theory, 東京大学, 2009年3月12-17日
29. オーガナイザー, Conference in honor of Bent Ørsted's 60th birthday: Representations, Lie groups, and conformal geometry, Göttingen, Germany, 6-10 April 2009 (with M. Pevzner, P. Ramacher and I. Witt)
30. オーガナイザー, Workshop on Integral Geometry and Group Representations, 玉原, 2009年8月5-10日 (with F. Gonzalez, T. Takehi and T. Oshima)
31. Scientific Committee, Conference in honor of Takayuki Oda's 60th birthday, 東京大学, 2009年9月14-17日
32. オーガナイザー, IPMU workshop: Quantizations, integrable systems and representation theory, IPMU, 東京大学柏キャンパス, 2009年11月5-6日 (with M. Guest and T. Kohno)
33. オーガナイザー, Representation Theory and Harmonic Analysis, Oberwolfach, Germany, 14-20 November 2010 (with B. Krötz)
34. Scientific committee, Recent Developments in Harmonic Analysis and their Applications, Marrakech, Morocco, 25-29 April 2011
35. オーガナイザー, Branching Problems for Unitary Representations, Max Planck Institute for Mathematics Bonn, Germany, 25-29 July 2011 (with B. Ørsted and B. Speh)

36. Scientific committee, Harmonic Analysis, Operator Algebras and Representations, CIRM, Luminy, France, 21–26 October 2012
37. オーガナイザー, Representations of Lie Groups and Supergroups, Oberwolfach, Germany, 10–16 March 2013 (with J. Hilgert, K.-H. Neeb and T. Ratiu)
38. オーガナイザー, 高木レクチャー, 第1回 (京都大学数理研, 2006年11月), 第2回 (東京大学, 2007年5月), 第3回 (東京大学, 2007年11月), 第4回 (京都大学, 2008年6月), 第5回 (東京大学, 2008年10月), 第6回 (北海道大学, 2009年6月), 第7回 (東京大学, 2009年11月), 第8回 (京都大学数理研, 2010年11月), 第9回 (京都大学数理研, 2011年6月) (with Y. Kawahigashi, H. Nakajima, K. Ono and T. Saito)
39. オーガナイザー, リー群論・表現論セミナー (2007– 東大; 2003–2007 RIMS; 1987–2001 東大)

#### G. 受賞

1. 井上学位賞 (2010) 「無限次元の対称性の解析」
2. Monna Lecturer, “リーマン幾何の枠組みを越えた不連続群論”, Netherland (2008)
3. フンボルト賞 (数学部門), Germany (2008)
4. Sackler Distinguished Lecturer, “ユニタリ表現の分岐則の理論”, Israel (2007)
5. 日本学術振興会賞 (2007) 「代数・幾何・解析にまたがるリー群の無限次元表現の理論と不連続群の研究」
6. [学生の受賞] 大島芳樹. 学生表彰「東京大学総長賞」(2010); 森田陽介. 学生表彰「東京大学総長賞」(2012)

#### H. 海外からのビジター

1. F. Kassel, (CNRS, France)
2. Hung Yean Loke (Singapore)

#### 連携併任講座