

小林俊行 (KOBAYASHI Toshiyuki)

## A. 研究概要

### 1. D 型極小表現の幾何・解析的研究

極小表現は, ユニタリ表現の中で根源的な対象であると考えられ, 90 年代より多くの代数的研究がなされている. 筆者は D 型単純群の極小表現を中心とし, 1 つの極小表現の幾何的モデルを何種類か発見することによって, それらが数学の異なる分野と結びつくような理論構築を目指し, この数年間で約 600 頁の論文を著してきた. 今年度の主な結果は以下の 2 つである.

1.A. 極小表現の Schrödinger モデル (2003, with B. Ørsted) を用いて, 二次錐上においてフーリエ変換に相当する基本的な作用素であるユニタリ反転変換を導入し, その明示形を与え, さらに 4 階の微分方程式を満たす特殊関数論への小さな応用を見出した (著書 [B-1]).

1.B. (変形理論) C 型単純群の極小表現である Weil 表現と D 型単純群の極小表現を連続的に結びつける “コアのユニタリ表現” を導入し, 特殊値が Fourier 変換, Hankel 変換, Dunkl 変換, Hermite 半群, Laguerre 半群となるような 3 パラメータをもつ作用素を構成し, 表現論的手法を用いてその基礎的性質の統一的証明を与えた ([3], 口頭発表 [8]).

### 2. 可視的作用と無重複表現

複素多様体における可視的作用という概念と無重複性の伝播という視点を導入し, 無限次元の場合および (組合せ論が絡む) 有限次元の場合を同時に含む, 無重複表現の統一的な理論をめざしている (口頭発表 [10]). [1] は表現論への応用である.

### 3. 不連続群

私の長年のモチーフである非リーマン空間における不連続群の研究を続けた [8].

### 4. 離散的分岐則の理論

ユニタリ表現論の離散的分岐則の発端となった例 (1988) をリーマン多様体および擬リーマン多様体のスペクトル理論の立場から論じた [6].

### 5. 実解析

5.A. 古典的な Weyl calculus を高次元化し, その積の明示公式を決定した [2].

5.B. 対称性の高いマルチプレイヤー作用素を全て捕捉する代数的枠組みを与え, その  $L^p$  有界性 [5] や二次超曲面上の大域解析との関係 [7] を研究した.

5.C.  $S^n \times S^n \times S^n$  上のある有理関数の積分値を

具体的に決定した ( $n = 1$  の場合が Bernstein-Reznikov 積分となる) [4].

## 1. Analysis on minimal representations

Minimal representations are building blocks of unitary representations. Classic examples are the Weil representation, and intensive algebraic studies have been made since 1990s by many people. Aiming for yet another *geometric approach* to minimal representations, in particular of type  $D$ , we applied conformal techniques, got a new construction of minimal representations, found conserved quantities for ultra-hyperbolic equations that led us to their unitarizability, and also proved the existence of a *Schrödinger model* ( $L^2$ -model) with B. Ørsted. With G. Mano ([B-1]), we determined an explicit form of the *unitary inversion operator* on the  $L^2$ -model on the isotropic cones, that generalizes the Euclidean Fourier transform. An original deformation theory was introduced in [3].

## 2. Multiplicity-free representations

I made in [1] systematic and synthetic applications of the original theory of *visible actions* on complex manifolds to multiplicity-free theorems, in particular, branching problems to symmetric pairs.

## 3. Discontinuous groups

Developing my conituing motif on discontinuous groups for non-Riemannian homogeneous spaces, I introduced the notion of *stability* for the study of *local deformation/rigidity* of discontinuous groups, and determined when the tangential space forms of general signature admits compact forms by means of the Radon-Hurwitz number with Yoshino. See [6] for a survey.

## 4. Theory of discrete branching laws

In the paper [6], we discussed the original example of discretely decomposable branching laws of unitary representation theory from the viewpoint of spectral geometry for Riemannian and indefinite Riemannian manifolds.

## 5. Real analysis - $L^p$ multipliers

5.A. We generalized the classic Weyl calculus to high dimensions, and found explicitly the com-

position formula [2].

5.B. Inspired by the idea of prehomogeneous spaces, I studied multipliers with high symmetries with Nilsson [5, 7].

5.C. I found an explicit formula of the integral of invariant meromorphic functions on  $S^n \times S^n \times S^n$  in a joint work with Clerc, Ørsted, and Pevzner [4].

## B. 発表論文

1. T. Kobayashi, “Multiplicity-free theorems of the restrictions of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs”, *Representation Theory and Automorphic Forms*, Progr. Math., vol. 255, Birkhäuser, 2007, pp. 45–109. ISBN 978-0817645052.
2. T. Kobayashi, B. Ørsted, M. Pevzner and A. Unterberger, “Composition formulas in the Weyl calculus”, *J. Funct. Anal.* **257** (2009), 948–991.
3. S. Ben Saïd, T. Kobayashi and B. Ørsted, “Generalized Fourier transforms  $\mathcal{F}_{k,a}$ ”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **347** (2009), 1119–1124. Its full paper (74 pages) is available at arXiv:0907.3749.
4. J.-L. Clerc, T. Kobayashi, B. Ørsted and M. Pevzner, “Generalized Bernstein–Reznikov integrals”, 40 p.p., *Mathematische Annalen* (to appear).
5. T. Kobayashi and A. Nilsson, “Group invariance and  $L^p$ -bounded operators”, *Math. Z.* **260** (2008), 335–354.
6. T. Kobayashi, “Hidden symmetries and spectrum of the Laplacian on an indefinite Riemannian manifold”, In: *Spectral Analysis in Geometry and Number Theory* (in honor of Professor Sunada, ed. M. Kotani), *Contemp. Math.* **484** (2009), 73–87. Amer. Math. Soc.
7. T. Kobayashi and A. Nilsson, “Indefinite higher Riesz transforms”, *Arkiv för Matematik* **47** (2009), 331–344.
8. T. Kobayashi, “On discontinuous group actions on non-Riemannian homogeneous spaces”, *Sugaku Expositions* **22** (2009), 1–19. Amer. Math. Soc.

## [著書]

B–1. T. Kobayashi and G. Mano, “The Schrödinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group  $O(p, q)$ ”, to appear in *Mem. Amer. Math. Soc.*, *アメリカ数学会*, 171 pages.

B–2. 小林俊行, 大島利雄, 『リー群と表現論』, 岩波書店, 2005, 610 pp. ISBN 978-4000061429.

## C. 口頭発表

1. Discontinuous Groups on pseudo-Riemannian Spaces, *Mathematische Arbeitstagung 2009*, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, Germany, June 2009.
2. Global Geometry and Analysis on Locally Symmetric Spaces—Beyond the Riemannian case, *Yale University 談話会*, USA, March 2009.
3. Conformal Geometry and Schrödinger Model of Minimal Representations (opening lecture), Bent Ørsted 教授 60 歳記念研究集会: Representations, Lie groups, and Conformal Geometry, Göttingen, Germany, April 2009.
4. Branching Problems for Zuckerman’s Derived Functor Modules, *Representation Theory and Mathematical Physics* (Gregg Zuckerman 教授 60 歳記念研究集会), Yale University, USA, October 2009.
5. Restriction of Unitary Representations to Reductive Subgroups, *Encuentro de Teoría de Lie* (Jorge Vargas 教授 60 歳記念研究集会), Córdoba, Argentina, November 2009.
6. Global Geometry and Analysis on Locally Symmetric Spaces—Beyond the Riemannian case, *Conference in honor of*

Toshio Oshima's 60th birthday "Differential Equations and Symmetric Spaces" (大島利雄先生還暦記念研究集会), University of Tokyo, Japan, January 2009.

7. Breaking Symmetries and Locally Symmetric Spaces, Geometry and Analysis of Automorphic Forms (織田孝幸教授還暦記念研究集会), the University of Tokyo, Japan, September 2009.
8. Conformal Geometry, Schrödinger Model of Minimal Representations, and Deformation of Fourier Transforms, (8.A.-8.F. では講演タイトル, 内容は多少異なるが, テーマが同じなので1つにまとめる.)  
8.A. Symmetry and Physics, Yale University, USA, March 2009; 8.B. Research Seminar "Lie Theory," Universität Paderborn, Germany, April 2009; 8.C. 83ème Rencontre entre physiciens théoriciens et mathématiciens (Encounter between theoretical physicists and mathematicians), Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg, France, June 2009; 8.D. Representation Theory XI, Dubrovnik, Croatia, June 2009 (two lectures); 8.E. Representation Theory of Real Reductive Groups, University of Utah, Salt Lake City, USA, July 2009; 8.F. Workshop on Integral Geometry and Group Representations, Tambara Institute of Mathematical Sciences, the University of Tokyo, Japan, August 2009.
9. Applications of Branching Laws to Certain Problems on Global Analysis, The Seventh Workshop in Lie Theory and its Applications, Córdoba, Argentina, November 2009.
10. Visible Actions and Multiplicity-free Representations, Plenary Series Lectures, The 30th Winter School on Geometry and Physics, Srni, Czech, January 2010.

#### D. 講義

1. 大域幾何学概論・幾何学 XE: 複素幾何と表現論: 複素多様体と正則ベクトル束の基礎

的な性質, 双正則な変換群, ベクトル束値の再生核, 表現の既約性の伝播定理, 表現の無重複性の伝播定理. (数理大学院・4年生共通講義)

2. 数学講究 XA: コンパクトリー群の表現の構造とその解析を題材として毎週, セミナーを行った. (数理4年生テキストセミナー)
3. (社会学) 数学 II: 線形代数学: 行列とベクトル, ランク概念, 連立一次方程式と行列, ベクトル解析, サイズの小さい行列の幾何学的意味, 一般のサイズの行列式, 逆行列 (+10回の演習). (教養学部前期課程講義)
4. 数学 II: 線形代数学: 抽象ベクトル空間上の線形代数の基礎. (教養学部前期課程講義)
5. 数理科学 II 文: 大きな数の評価, 計算量, 初等整数論, RSA 暗号. (教養学部前期課程講義)
6. 数学講究 XB: リー群と表現論: 擬リーマン等質空間における不連続群に関する未解決問題について. (数理大学院)
7. Visible Actions and Multiplicity-free Representations: 可視的作用と無重複表現の理論についての連続講義. (The 30th Winter School on Geometry and Physics, Srni, チェコ, 大学院生, 専門家向け)

#### E. 修士・博士論文

1. (修士) 大島 芳樹 (OSHIMA Yoshiki): Restriction of derived functor modules to symmetric subgroups (和訳: 導来関手加群の対称部分群への制限).
2. (修士) 奥田 隆幸 (OKUDA Takayuki): Proper actions of  $SL(2, \mathbb{R})$  on real semisimple symmetric spaces (和訳: 実半単純対称空間における  $SL(2, \mathbb{R})$  の固有な作用).

#### F. 対外研究サービス

[ジャーナルのエディター]

1. Managing Editor, Japanese Journal of Mathematics (日本数学会) (2005-)

2. Managing Editor, Takagi Booklet, vol. 1–5 (日本数学会) (2005–)
  3. Editor, Geometriae Dedicata (Springer) (2000–)
  4. Editor, International Mathematics Research Notices (Oxford 大学出版) (2002–)
  5. Editor, International Journal of Mathematics (World Scientific) (2004–)
  6. Editor, International Mathematics Research Papers (Oxford 大学出版) (2005–)
  7. Editor, Journal of Mathematical Sciences, The University of Tokyo (2007–)
  8. Editor, Advances in Pure and Applied Mathematics (de Gruyter) (2008–)
  9. Editor, Kyoto Journal of Mathematics (2010–)
  10. Editor in Chief, Journal of Mathematical Society of Japan (日本数学会) (2002–2004; 2004–2006), Editor (1998–2006)
  11. Editor, Publications RIMS (2003–2007)
  12. Editor, Progr. Math. vol. 255 (with W. Schmid, J.-H. Yang), Birkhäuser, 2007
- [学会・他大学の委員など]
13. 日本学術会議連携会員 (2006–2008)
  14. 日本数学会評議員 (2003–2005; 2005–2007)
  15. 日本数学会理事 (2003–2005; 2005–2007)
  16. 京都大学数理解析研究所専門委員 (2007–)
  17. 科学研究費等の審査委員: 日本 (JSPS), 米国 (NSF-AMS), ドイツ, ルクセンブルク, 中華人民共和国
  18. Jury, Habilitation, Reims University, France (2006)
- [国際研究集会のオーガナイザーなど]
19. オーガナイザー, Symposium on Representation Theory, 淡路島, 2004年11月16–19日 (with H. Ochiai and H. Tagawa)
  20. オーガナイザー, International Symposium on Representation Theory and Automorphic Forms, Seoul National University, Korea, 14–17 February 2005 (with W. Schmid and J.-H. Yang)
  21. オーガナイザー, Harmonische Analysis und Darstellungstheorie Topologischer Gruppen, Oberwolfach, Germany, 14–20 October 2007 (B. Krötz, E. Lapid, and C. Torossian)
  22. Scientific Committee, Hermitian Symmetric Spaces, Jordan Algebras and Related Problems (conference in honor of Prof. Jean-Louis Clerc), Centre International de Recherches Mathématiques, Luminy, France, 23–27 June, 2008
  23. オーガナイザー, 微分方程式と対称空間—大島利雄先生還暦記念研究集会, 東京大学, 2009年1月13–16日 (with H. Matumoto, H. Ochiai and H. Sekiguchi)
  24. オーガナイザー, Mathematics: From Today to Tomorrow—Global COE Opening Symposium at Tokyo, 東京大学, 2009年1月30日–2月1日 (with Y. Kawahigashi, Y. Kawamata and T. Saito)
  25. オーガナイザー, The 8th Workshop on Nilpotent Orbits and Representation Theory (NORTH 8), 大津, 2009年3月8–11日 (with K. Nishiyama and H. Yamashita)
  26. オーガナイザー, GCOE Spring school on representation theory, 東京大学, 2009年3月12–17日
  27. オーガナイザー, Conference in honor of Bent Ørsted’s 60th birthday: Representations, Lie groups, and conformal geometry, Göttingen, Germany, 6–10 April 2009 (with M. Pevzner, P. Ramacher and I. Witt)
  28. オーガナイザー, Workshop on Integral Geometry and Group Representations, 玉原, 2009年8月5–10日 (with F. Gonzalez, T. Takehi and T. Oshima)

29. Scientific Committee, Conference in honor of Takayuki Oda's 60th birthday, 東京大学, 2009年9月14–17日
30. オーガナイザー, IPMU workshop: Quantizations, integrable systems and representation theory, IPMU, 東京大学, 2009年11月5–6日 (with M. Guest and T. Kohno)
31. オーガナイザー, Representation Theory and Harmonic Analysis, Oberwolfach, Germany, 14–20 November 2010 (with B. Krötz)
32. オーガナイザー, 高木レクチャー, 第1回 (京都大学数理研, 2006年11月), 第2回 (東京大学, 2007年5月), 第3回 (東京大学, 2007年11月), 第4回 (京都大学, 2008年6月), 第5回 (東京大学, 2008年10月), 第6回 (北海道大学, 2009年6月), 第7回 (東京大学, 2009年11月) (with Y. Kawahigashi, H. Nakajima, K. Ono and T. Saito)
33. オーガナイザー, リー群論・表現論セミナー (1987–2001 東大; 2003–2007 RIMS; 2007–東大)

#### G. 受賞・栄誉

1. Monna Lecturer, Netherland (2008)
2. フンボルト賞 (数学部門), Germany (2008)
3. Sackler Distinguished Lecturer, Israel (2007)
4. 日本学術振興会賞 (2007) 「代数・幾何・解析にまたがるリー群の無限次元表現の理論と不連続群の研究」
5. 大阪科学賞 (2006) 「リーマン幾何の枠組を超えた不連続群論の創始とリー群の無限次元表現における離散的分岐則の発見」

#### H. 海外からのビジター

1. Professor Yves Benoist (2010.2–3)
2. Dr. Fanny Kassel (2010.1–2)
3. Mr. Jan Moellers (2009.11)
4. Professor Michael Pevzner (2009.10–11)
5. Professor Michel Duflo (2009.10)