等質空間の幾何と不連続群

2000 年 夏　小林 俊行 (東京大学)

函数論で習うリーマンの写像定理「$\mathbb{C}$ の単連結な領域は, $\mathbb{C}$ 自身でなければ単位円板と等角同値である」を強い形で述べたのが, クライン–ポアンカレ–ケーベによるリーマン面の一意化定理「単連結なリーマン面は, $\mathbb{C}$ か 単位円板か $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ のいずれかに双正則である」である。

変換群の観点におけるこの定理の重要性は, 単位円板には $SL(2,\mathbb{R})$ が, $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ には $SL(2,\mathbb{C})$ がそれぞれ一次分数変換で, また $\mathbb{C}$ には $\mathbb{C}$ の平行移動が, 推移的な変換リー群として作用している事実に立脚している。特に, (単連結と限らない) 任意のリーマン面は, 適当な リー群 G (G は $PSL(2,\mathbb{C})$, $PSL(2,\mathbb{R})$, $\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}$ のいずれか), と G の閉部分群 H, G の離散部分群 $\Gamma \simeq \pi_1(M)$ を用いて

$$\Gamma\backslash G/H$$

と両側剰余類としてあらわされることがわかる。このように, 両側剰余類としてあらわされる多様体を等質多様体 G/H の **クリフォード-クライン形** と呼ぶ。クリフォード-クライン形として表される多様体は,

　　局所的な性質は 等質多様体 G/H によって
　　大域的な性質は 離散群 Γ によって

統制できることが重要である。逆に, さまざまな局所的性質をもつ多様体が等質多様体のクリフォード-クラインとして記述できることがしられている。

G/H がリーマン対称空間の場合は, リーマン面の高次元化として, 1960 年代に Borel, Harish-Chandra, Mostow, Tamagawa などのコンパクトな クリフォード-クライン形 および 非コンパクト体積有限のクリフォード-クライン形の存在定理が確立され, 不連続群の研究や, 保型形式論などの土台に繋がった。

一方, 非リーマンな空間では, 局所的に等質多様体と同型な多様体の基本群は, 場合によっては殆ど一意的になることが 1962 年 Calabi-Markus によって定曲率のローレンツ多様体に対して発見された。1980 年代後半より, どのような局所構造に対してコンパクトな クリフォード-クライン形が存在するか, あるいは 豊富な基本群の可能性がありうるかという一般論が小野薫氏や筆者によって研究され始めた。

1990 年代に入って, コンパクトな クリフォード-クライン多様体の存在問題と半単純リー群の構造定理, 特性類, アノソフ フロー, エルゴード理論, シンプレクティック幾何, ユニタリ表現論などの様々な分野との関連が, Benoist, Labourie, Zimmer, Margulis, 筆者らによって次第に明らかになっているが, まだ多くの基本問題が未解決である。

この講義では, 最近証明された不連続な作用の判定条件を中心に解説する。さらに, 時間があれば, クリフォードクライン形の存在問題について, その基本的な手法のいくつかと何が知られていて何が未解決かを初等的に解説したい。

0. クリフォード-クライン形とはなにか?
1. 固有不連続な作用 (離散的な立場と連続的な立場).
2. Calabi-Markus 現象.
3. 固有不連続性の判定条件
4. 等質多様体のコンパクト クリフォード-クライン形の存在問題.
5. 未解決問題.