

第 10 回高木レクチャー

平成 24 年 5 月 26 日 (土)

京都大学数理解析研究所

大講義室 420 号室

ABSTRACT

Y. Benoist: *Random Walks on Homogeneous Spaces* (等質空間におけるランダムウォーク)

Let a_0 and a_1 be two matrices in $SL(2, \mathbb{Z})$ which span a non-solvable group. Let x_0 be an irrational point on the torus \mathbb{T}^2 . We toss a_0 or a_1 , apply it to x_0 , get another irrational point x_1 , do it again to x_1 , get a point x_2 , and again. This random trajectory is equidistributed on the torus. This phenomenon is quite general on any finite volume homogeneous space.

$SL(2, \mathbb{Z})$ に属する 2 つの行列 a_0 と a_1 が生成する群が可解群でないとし、また、 x_0 を 2 次元トーラス \mathbb{T}^2 の非有理点とする。行列 a_0 あるいは a_1 のいずれかを二分の一の確率で選び、それを x_0 に作用させると別の非有理点 x_1 が得られ、さらに同じことをすると別の非有理点を得られる。このランダム点列はトーラスに一様分布する。この現象は、任意の有限体積の等質空間に対して、非常に一般的な現象として起こるということを紹介する。

A. Naor: *The Ribe Program—Ultrametric Skeletons* (リーベ・プログラム—超距離スケルトン)

Talk 1: The Ribe program

A theorem of M. Ribe from 1976 asserts that finite dimensional linear properties of normed spaces are preserved under uniformly continuous homeomorphisms. Thus, normed spaces exhibit a strong rigidity property: their structure as metric spaces determines the linear properties of their finite dimensional subspaces. This clearly says a lot about the geometry of normed spaces, but one can also use it to understand the structure of metric spaces that have nothing to do with linear spaces, such as graphs, manifolds or groups. After all, there is a deep and rich theory of finite dimensional linear invariants of Banach spaces with far reaching structural consequences. In view of Ribe's theorem we know that these invariants are preserved under homeomorphisms that are "quantitatively continuous", so in principle one can reformulate them using only the notion of distance; without referring to the linear structure in any way. Once this is achieved, one can study these properties in the context of general metric spaces using insights that originally made sense only in the context of linear spaces, and use these insights to solve problems in areas that do not have a priori connections to normed spaces. Thus, Ribe's rigidity theorem inspired a research program, known today as the Ribe program, which was formulated by Bourgain in 1986, the goal being to find explicit metric reformulations of key concepts and theorems from the theory of normed spaces. Major efforts by many mathematicians over the past 25 years led to a range of remarkable achievements within the Ribe program, with applications to areas such as group theory, harmonic analysis, and computer science. This talk will be a self-contained and elementary introduction to the Ribe program. We will explain some of the milestones of this research program, describe some recent progress, and discuss some challenging problems that remain open.

Talk 1: リーベ・プログラム

M. リーベの1976年の定理は、ノルム空間の有限次元の線形的性質は一様連続同相写像で保たれることを主張している。よって、ノルム空間は強い剛性を示す。すなわち、距離空間としての性質が、有限次元部分空間の線形的性質を決定する。このことは明らかに、ノルム空間の幾何について多くのことを導くが、グラフ、多様体、群など、線形空間と何の関係もない距離空間の構造を理解するのにもこのことが使えるのである。結局のところ、バナッハ空間の有限次元線形不変量については、深く豊かな理論があり、構造についての遠大な結果を導いている。リーベの定理の視点からは、これらの不変量は「定量的に連続」な同相写像で保たれることがわかり、原理的には距離の概念だけを用いて、線形構造は一切使わずにこれらを再定式化できる。これができれば、もともとは線形空間でだけ意味があった洞察を用いて、一般の距離空間でこれらの性質を研究し、これらの洞察を使ってもともとはノルム空間と関係のなかった分野の問題を解くことができる。このように、リーベの剛性定理は、1986年にブルガンによって定式化されたリーベ・プログラムを導いた。その目的は、ノルム空間の理論の重要な概念や定理を明示的に距離空間の問題として再定式化することである。過去25年にわたり、多くの数学者の多大な努力により、このプログラムで多くのすばらしい成果が得られた。その応用は、群論、調和解析、コンピュータ科学に及ぶ。この講演は、リーベ・プログラムへの独立した初等的イントロダクションである。このプログラムの画期的な成果を説明し、最近の進展について述べ、挑戦的な未解決問題について議論する。

Talk 2: Ultrametric skeletons

This talk is devoted to the description of an example of a step in the Ribe program. Let (X, d) be a compact metric space, and let μ be a Borel probability measure on X . We will show that any such metric measure space (X, d, μ) admits an “ultrametric skeleton”: a compact subset S of X on which the metric inherited from X is approximately an ultrametric, equipped with a probability measure ν supported on S such that the metric measure space (S, d, ν) mimics useful geometric properties of the initial space (X, d, μ) . We will make this geometric picture precise, and explain a variety of applications of ultrametric skeletons in analysis, geometry, computer science, and probability theory.

Talk 2: 超距離スケルトン

この講演ではリーベ・プログラムのあるステップの一例を示す。 (X, d) をコンパクト距離空間とし、 μ を X 上のボレル確率測度とする。このような距離測度空間 (X, d, μ) は常に超距離スケルトンを持つことを示す。すなわち、 X のコンパクト集合 S で、 X から誘導される距離が近似的に超距離であり、 S 上に台を持つ確率測度 ν で、距離測度空間 (S, d, μ) が元の空間 (X, d, μ) の有用な性質とよく似た性質を持つものである。この幾何学的描像を正確にし、超距離スケルトンの、解析、幾何、コンピュータ科学、確率論における様々な応用を説明する。