論文の内容の要旨

論文題目 Construction and classification of matrix-valued differential symmetry breaking operators from S^3 to S^2

（３次元球面から２次元球面への対称性破れの行列値微分作用素の構成と分類について）

氏名 VÍCTOR PÉREZ-VALDÉS

3次元球面 S^3 の共形変換群 $SO_0(4,1)$ で同変な既約ベクトル束は，奇数次のランク $(=2N+1)$ と複素数 λ でパラメトライズされる．一方，2次元球面 S^2 の共形変換群 $SO_0(3,1)$ で同変な既約ベクトル束はすべて直線束となり，整数 m と複素数 ν でパラメトライズされる．

本論文では, 3次元球面上のベクトル束 $\mathcal{V}_\lambda^{2N+1}$ から，2次元球面上の直線束 $\mathcal{L}_{m,\nu}$ への微分作用素であって，共形変換群の組 $SO_0(4,1) \supset SO_0(3,1)$ に関する対称性破れ作用素

$$\mathbb{D}_{\lambda,\nu}^{N,m} : C^\infty(S^3, \mathcal{V}_\lambda^{2N+1}) \to C^\infty(S^2, \mathcal{L}_{m,\nu})$$

の構成と分類問題を考える．特に，これらの問題を，ベクトル束のランク ≤ 7 (すなわち, $N \in \{1,2,3\}$) および $m > N$ の場合に完全に解決し，$N \geq 4$ の場合の解決方法を提示する．

表現論の観点から見れば，本論文は2つの簡約 Lie 群の主系列表現の間の対称性破れ作用素を研究していることになる．この観点から，本論文の動機を次のように述べることができる．

群の表現論において，「最小単位」のものに対応するのは既約表現である．有限次元表現については，既約表現の分類と，既約表現への分解という基本課題は20世紀前半から研究されてきた．特に，後者は問題 1 の設定で「分岐則の問題」と呼ばれる．無限次元表現の場合には多くの解析的な困難が知られていた一方，小林俊行先生の90年代の一連の論文 ([2]) を契機に，最近の30年間において分岐則の理論が小林俊行, M. Duflo, B. Gross, D. Prasad, B. Speh, J. A. Vargas, 大島芳樹等により大きく発展している．

問題 1（分岐則の問題）: Lie 群 G の既約表現 Π を部分群 G' に制限したときに，どのように振る舞うか（どのように分解するか）？

小林先生は Lie 群の無限次元表現論における分岐則の一般理論を切り拓くにあたって，三つのステージに分けられるプログラム (*ABC program* [4]) を提起された．

- **ステージ A**: 表現の制限における一般論
- **ステージ B**: 分岐則の決定
- **ステージ C**: 対称性破れ作用素の構成

ここで, A, B, C は順に **A**bstract features of the restriction, **B**ranching laws, **C**onstruction of symmetry breaking operators のそれぞれの頭文字に由来する．

ステージ A の目標は，表現の制限 $\Pi|_{G'}$ に対し，重複度やスペクトルなどの抽象的な理論を展開することである．ステージ B は表現の制限 $\Pi|_{G'}$ の既約分解を求めることを目指す．表現 Π が，制限 $\Pi|_{G'}$ が完全可約になるような G の有限次元表現の場合は, $\Pi|_{G'}$ の「既約分解」は有限直和となる ($SU(2)$ の有限次

元表現のテンソル積に対する Clebsch–Gordan formula はその一例である). 表現 Π が G のユニタリ表現の場合は, その「既約分解」を直積分の概念を用いて与えることができる (Mautner–Teleman の定理). 表現 Π がユニタリとは限らない一般の場合では, このような分解はできないが, π を G' の任意の既約表現とするとき, ステージ B を空間 $\mathrm{Hom}_{G'}(\Pi|_{G'}, \pi)$ の決定問題として捉えることができる.

空間 $\mathrm{Hom}_{G'}(\Pi|_{G'}, \pi)$ の元は, **対称性破れ作用素 (symmetry breaking operators)** と呼ばれる. ステージ C では, この対称性破れ作用素を具体的に構成することを目標とする. 抽象性の高いステージ A, B と異なり, ステージ C は具体的な表現の実現に依存するので, 幾何的および解析的問題と関わることがよくある.

本論文ではステージ C に注目する. 具体的に, 一つの簡約 Lie 群の対 (G, G') に焦点を当て, 微分作用素として表される対称性破れ作用素の構成と分類問題に取り組む. 古典的な例としては, 保型形式に現れる Rankin–Cohen の双線型微分作用素があり, これは $SL(2,\mathbb{R})$ の離散系列表現のテンソル積に対する対称性破れ作用素とみなせる. また, A. Juhl が共形幾何学の枠組みで構成した共形不変な微分作用素は, ローレンツ群の球主系列表現に対する対称性破れ作用素である ([1]).

以下で, 本論文で扱われる幾何的な設定を一般的な形で述べ, ステージ C を具体的に定式化する.

微分多様体 X, Y, その上のベクトル束 $\mathcal{V} \to X$, $\mathcal{W} \to Y$ および, その間の滑らかな写像 $p: Y \to X$ が与えられたときに, 切断空間に作用する "微分作用素" $T: C^\infty(X, \mathcal{V}) \to C^\infty(Y, \mathcal{W})$ という概念を"局所作用素"として定義することができる. これは J. Peetre の有名な結果 ([9]) を一般化する形で定義される.

さらに, Lie 群 $G' \subset G$ がそれぞれ, ベクトル束 $\mathcal{W} \to Y$, $\mathcal{V} \to X$ に同変的に作用し, および p が Y から X への G' 同変な写像であると仮定する. このときに, 次の問題を考えることができる:

問題 2: 空間 $\mathrm{Diff}_{G'}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ すなわち, G' 同変な微分作用素 (**微分対称性破れ作用素**)

$$D: C^\infty(X, \mathcal{V}) \to C^\infty(Y, \mathcal{W})$$

のなす空間を決定せよ.

ベクトル束 $\mathcal{W}$ が $\mathcal{V}$ の p による引き戻し $p^*\mathcal{V}$ に同型であるならば, 制限写像 $f \mapsto f|_Y$ が明らかに $C^\infty(X, \mathcal{V})$ から $C^\infty(Y, \mathcal{W})$ への G' 同変な微分作用素である. しかし, $\mathcal{W}$ と $p^*\mathcal{V}$ との間に射が存在しない最も一般の場合にも, 対称性破れ作用素が存在することがあり, それを決定することは一般に難しく, 多くの未解決問題がある.

最初に解決されたケースは, 小林先生と Speh 先生が解決した4つ組 $(X, Y, G, G') = (S^n, S^{n-1}, O(n+1,1), O(n,1))$ の場合であり, これはさらにベクトル束 $\mathcal{V} = \bigwedge^i T^*X$, $\mathcal{W} = \bigwedge^j T^*Y$ に対して拡張された. そこでは, 対称性破れ作用素の分類の最終ステップは, 微分作用素として表されるものの分類に帰着されるという証明が与えられている ([8]).

さて, 多様体 $X = G/P \supset Y = G'/P'$ が旗多様体で, その上のベクトル束 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ がそれぞれ放物型部分群 P, P' の有限次元表現から得られる同伴ファイバー束である場合に, 微分対称性破れ作用素の構成を求める手法 (*F-method*) が最近発見された ([3]). この手法は, 微分対称性破れの作用素を求めるという問題を, 一般化 Verma 加群に"代数的 Fourier 変換"を施すことによって, ある高階の偏微分方程式系を満たす多項式を決定するという問題に帰着させ, 後者を不変式論を援用して解くという方法である. 放物型部分群 P の Lie 環の冪零根基が可換なとき, 現れる微分方程式系の主要項は 2 階偏微分方程式であることが証明できる ([7]).

この設定で小林先生と Pevzner 先生は, $X \supset Y$ が Hermite 対称空間の組のときに, いくつかの具体例で F-method を適用し, 微分対称性破れ作用素を構成した ([7]). さらに, 小林先生, Pevzner 先生と久保

先生は球面における微分形式の間の微分対称性破れ作用素を完全に分類した ([5]).

この方針で，本博士論文では $(X, Y, G, G') = (S^3, S^2, SO_0(4,1), SO_0(3,1))$ の場合を考え，S^3 上のランク $2N+1$ のベクトル束 $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\lambda^{2N+1}$ と S^2 上の直線束 $\mathcal{W} = \mathcal{L}_{m,\nu}$ に対して問題 2 の解決について論じる．具体的に，問題 2 は次の二つの問題に分けられる：

問題 A: 微分対称性破れ作用素のなす空間

$$\mathrm{Diff}_{SO_0(3,1)}\left(C^\infty(S^3, \mathcal{V}_\lambda^{2N+1}), C^\infty(S^2, \mathcal{L}_{m,\nu})\right)$$

が零にならないためのパラメータ $(\lambda, \nu, N, m) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ に対する必要十分条件を決定せよ．具体的に，その次元を決定せよ．

問題 B: 上記の空間の生成元 $\mathbb{D}_{\lambda,\nu}^{N,m}$ を具体的に構成せよ．

上記の問題 A, B は $N = m = 0$ の場合は共形幾何の観点による研究で [1, 6] で解決され, $N = 1$, $m = 0$ の場合は [5] の結果から導かれる (cf. [10, Rem. 1.5])．一方, $N = 1$, $|m| \geq 1$ の場合には [10] で解決した．本論文では，[10] の結果を含めて，問題 A, B を $N = 1, 2, 3$, $|m| > N$ の場合に完全に解決する．一般の $N \in \mathbb{N}$ に対して問題 A, B は未解決だが， $|m| > N$ の場合にこれらの問題を解く方法を提案する．

まず, F-method を適用すれば，上記の問題 A, B は $2N+1$ 個の未知の多項式に関する $2(2N+1)$ 個の連立常微分方程式という過剰決定問題の解が存在するためのパラメータの決定問題および，その具体的な解を求めることに同値であることが証明できる．過剰決定の常微分方程式系を3つのステップに分けた解決方法を一般の $N \in \mathbb{N}$ に対して紹介する．

常微分方程式系の方程式を (α) と (β) と二つのグループに分ける. (α) は $2N+2$ 個の連立微分方程式からなるグループであり，これらは Gegenbauer 微分作用素を主要項とする二階微分方程式である．一方, (β) は $2N$ 個の一階微分方程式のグループである．ステップ 1 では，微分方程式系の方程式の間にヒエラルキーを見出し，(α) の方程式を帰納的に解く方法を見つけ，微分方程式系の解を構成する $2N+1$ 個の多項式を, $2N+1$ 個の定数を除いて決定することを証明する．具体的に，これらは二つの Gegenbauer 多項式の積の有限和で書けることが証明できる．ここで，一つの多項式 (図 1 の f_0) だけは2通りの表示をもつことに注意する．図 1 では $N = 3$ の場合にこのヒエラルキーが描かれている．赤い矢印は (α) の方程式を解き，多項式 $f_{\pm j}$ を得る順番を表し，青い線は (β) の方程式がどの多項式を関連させるかを表す.

ステップ 2 では，ステップ 1 で得られた多項式が (β) の方程式を満たすことを確める．これは，多項式に現れる $2N+1$ 個の定数が $2N$ 個の一次方程式を満たすことと同値であり，これを Gegenbauer 多項式の間の三項関係式を用いて証明する．最後に，ステップ 3 では，ステップ 1 で得られた一つの多項式に対する二つの式が一致することを確める.

ステップ 1 は一般の $N \in \mathbb{N}$ に対して証明することができるが，ステップ 2 以降は $N = 1, 2, 3$ の場合に限って証明する．ステップ 2 は微分方程式系の解決において一番複雑な部分で，現時点では $N \geq 4$ の場合にはまだ証明が見つかっていない．なお，ステップ 2 を完成させたという仮説のもとでステップ 3 を証明することはできるので，この仮説を認めれば一般の $N \in \mathbb{N}$ に対して問題 A, B を解決することができる．具体的に，$\mathbb{D}_{\lambda,\nu}^{N,m}$ の存在条件 (Theorem 1.2 (iii)) および，$\mathbb{D}_{\lambda,\nu}^{N,m}$ の具体的な形（本論文の(1.8)–(1.9)）が $N = 1, 2, 3$ だけではなく，一般の $N \in \mathbb{N}$ の場合に成り立つことが予想できる.

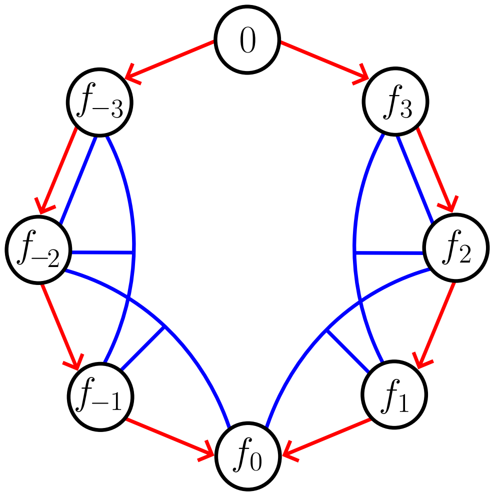

図 1　微分方程式 (α) (赤) と (β) (青) との間のヒエラルキー ($N = 3$ の場合)

参考文献

[1] A. Juhl. *Families of Conformally Covariant Differential Operators, Q-Curvature and Holography.* Progress in Mathematics, vol. 275 (Birkhäuser, Basel, 2009).

[2] T. Kobayashi. *Discrete decomposability of the restriction of $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ with respect to reductive subgroups I.* Invent. Math., **117**: 181-205, 1994; *II.* Annals of Math., **147**(3): 709-729, 1998; *III.* Invent. Math., **131**: 229-256, 1998.

[3] T. Kobayashi. *F-method for constructing equivariant differential operators.* Geometric analysis and integral geometry, 139–146, Contemp. Math., **598**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.

[4] T. Kobayashi. *A program for branching problems in the representation theory of real reductive groups.* Representations of reductive groups, 277-322, Prog. Math., **312**, Birkhäuser/Springer, Cham, 2015.

[5] T. Kobayashi, T. Kubo, M. Pevzner. *Conformal symmetry breaking operators for differential forms on spheres.* Lecture Notes in Mathematics, **2170**. Springer Singapore, 2016. ix+192 pp.

[6] T. Kobayashi, B. Ørsted, P. Somberg, V. Souček. *Branching laws for Verma modules and applications in parabolic geometry. I.* Adv. Math. **285** (2015), 1796–1852.

[7] T. Kobayashi, M. Pevzner. *Differential symmetry breaking operators: I. General theory and F-method; II. Rankin–Cohen operators for symmetric pairs.* Selecta Math. (N.S.) **22** (2016), no. 2, 801-845 and 847-911.

[8] T. Kobayashi, B. Speh. *Symmetry breaking for representations of rank one orthogonal groups I.* Mem. Amer. Math. Soc. **238**(2015), no. 1126, v+110 pp.; *II.* Lecture Notes in Mathematics, **2234**. Springer, Singapore, 2018, xv+342 pp.

[9] J. Peetre. *Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels.* (French) Math. Scand. **7** (1959), 211–218.

[10] V. Pérez-Valdés. *Conformally covariant symmetry breaking operators for a vector bundle of rank 3 on S^3.* Internat. J. Math. **34** (2023) no. 12, Paper No. 2350072.