論文の内容の要旨

修士論文題目

Branching problem of tensoring two Verma modules and its application to differential symmetry breaking operators
（ヴァーマ加群のテンソルの分岐則と微分対称性破れ作用素への応用）

氏名: 村上怜司

$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の 2 つのヴァーマ加群のテンソル積の重複度について同値条件を並べた先行研究の重要な定理 [6, Thm. 9.1] に対し, テンソル積そのものの加群構造を決定することでさらなる同値条件を付加した. それによって, 微分対称性破れ作用素の次元があがるという幾何的な状況と, ヴァーマ加群のテンソル積が自己双対性を失うという代数的な状況が対応していることを示した.

本稿で定理として定式化した結果は次の三つである。

0.1 Theorem 1.1

有限次元複素半単純リー代数 $\mathfrak{g}$, カルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ とそれを含むボレル部分代数 $\mathfrak{b}$ を固定する. 最高ウェイト $\mu \in \mathfrak{h}^*$ の Verma 加群を $M(\mu) := U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\mu$ としよう. 任意の $\mu', \mu'' \in \mathfrak{h}^*$ に対し, $M(\mu') \otimes M(\mu'')$ の $\mathfrak{g}$ 加群構造が我々の知りたいものである. $(\mu', \mu''), (\nu', \nu'')$ を 2 つのウェイトのペアとしよう. 小林俊行氏の研究 [4, Thm. 3.10] から, $\mu' + \mu'' = \nu' + \nu''$ が満たされているとき, グロタンディーク群のレベルで次の等式が成立する.

$$[M(\mu') \otimes M(\mu'')] = [M(\nu') \otimes M(\nu'')]$$

この等式が, 左辺と右辺に現れるウェイトの中に少なくとも一つずつ anti-dominant なものがあれば $\mathfrak{g}$ 加群としての等式になることを Kåhrström 氏の研究 [2, Prop. 2.6] を用いて示した. さらに, 後述する Theorem 1.3 を用いることにより, 仮定を落とした場合に加群が同型でなくなってしまう例を構成した.

0.2 Theorem 1.2

$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ について, 小林俊行氏と Pevzner 氏による共同研究で近年明らかになった現象 [6, Thm.9.1] がある. ウェイトの三つ組 $(\lambda', \lambda'', \lambda''') \in \mathbb{C}^3$ が整数条件 $\lambda''' - \lambda' - \lambda'' \in 2\mathbb{N}$ をみたしているときに三つのコンディションが同値になるというものだが, 本修士論文で更なる同値なコンディションを付け加えた. 先行研究の三つのコンディションは (i) テンソル積 $M(-\lambda') \otimes M(-\lambda'')$ 内の対応するヴァーマ加群 $M(-\lambda''')$ の重複度が 2 に上昇する, (ii) ウェイトの三つ組が整数であり, ある 2 つの不等式を満たす, (iii) 対応するパラメータの Rankin-Cohen bracket が消える $\mathcal{RC}_{\lambda', \lambda''}^{\lambda'''} = 0$, といったものである. 付け加えたコンディションは (iv) 対応する無限小指標 $-\lambda''' + \rho$ への射影が 2 つのヴァーマ加群の直和 $M(-\lambda''') \oplus M(\lambda''' - 2)$ になるというものである. ここで ρ は正ルートの和を 1/2 倍したものである. (iv) の条件を満たしていないときには, 対応する加群は自己双対的な射影被覆であるということがわかっている. ここから, 重複度が 2 に上昇する, つまり微分対称性破れ作用素の次元が増えているとき, 対応する Verma 加群のテンソルの方では自己双対性に失敗していることが導かれる. ここから, 幾何の意味での対称性と代数の意味での加群の双対性が対応しているという事実が洞察される. Theorem 1.2 は後述する Theorem 1.3 の系として導かれる.

0.3 Theorem 1.3

Theorem 1.1 で, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の場合に $M(\mu') \otimes M(\mu'')$ の $\mathfrak{g}$ 加群構造を完全に決定したのが Theorem 1.3 である. 証明では $M(\mu') \otimes M(\mu'')$ が一般化無限小指標分解でき, 各成分は BGG 圏 $\mathcal{O}$ にはいることを用いて, $\mathcal{O}$ の表現論に帰着させることが重要である. 一般化無限小指標分解に関する事実は小林俊行氏の分岐則に関する研究 [4] を応用することで導かれる. この定理によって, パラメータと対応する $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の加群構造を見比べることで Theorem 1.2 を得る. さらに, テンソル積 $M(-\lambda') \otimes M(-\lambda'')$ が無重複性であることと自己双対的であることが同値であることがわかる.

参考文献

[1] J. E. Humphreys. *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category O*, volume 94 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[2] J. Kåhrström. Tensoring with infinite-dimensional modules in O_0. *Algebr. Represent. Theory*, 13(5):561–587, 2010.

[3] T. Kobayashi. Discrete decomposability of the restriction of $A_q(\lambda)$ with respect to reductive subgroups. III. Restriction of Harish-Chandra modules and associated varieties. *Invent. Math.*, 131(2):229–256, 1998.

[4] T. Kobayashi. Restrictions of generalized Verma modules to symmetric pairs. *Transform. Groups*, 17(2):523–546, 2012.

[5] T. Kobayashi, B. Ørsted, P. Somberg, and V. Souček. Branching laws for Verma modules and applications in parabolic geometry. I. *Adv. Math.*, 285:1796–1852, 2015.

[6] T. Kobayashi and M. Pevzner. Differential symmetry breaking operators: II. Rankin-Cohen operators for symmetric pairs. *Selecta Math. (N.S.)*, 22(2):847–911, 2016.