

Riemann 面の調和体積とその応用

田所 勇樹*

2009 年 11 月 23 日 第 52 回函数論シンポジウム

1 序

X を種数 $g \geq 3$ のコンパクト Riemann 面とする*¹. Harris [9] は, Chen [3] の反復積分を用いて調和体積 I を定義した*². 調和体積は複素構造のみに依存するため, これを決定することにより, Riemann 面の違いを知ることが講演者の研究目的の 1 つである.

調和体積の具体的計算については, Harris [10] の Fermat 4 次曲線 F_4 , つまり種数 3 の Riemann 面, 以外ほとんど知られていなかった. なお, Harris は F_4 の $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ に値を持つ調和体積を計算している. Harris [9] は, 超楕円対合を用いて超楕円曲線 C の調和体積の 2 倍, つまり $2I$, が自明であることまでは指摘していた. そこで, 講演者 [18] は超楕円曲線の調和体積を決定した. 証明には, 反復積分の直接計算, および超楕円的写像類群のコホモロジーの 2 通りの手法がある.

x_0 を X 上の点とする. 調和体積と同様にして, Pulte [16] は点付き Riemann 面 (X, x_0) に対して, 点付き調和体積 I_{x_0} を定めた. Pulte はこれを用いて, 基本群の群環 $\mathbb{Z}\pi_1(X, x_0)$ の添加イデアルから得られる混合 Hodge 構造を通じて定式化される点付き Riemann 面の Torelli の定理を示した. これにより, 点付き調和体積は点付き Riemann 面と深いつながりがあることがわかる. 講演者は超楕円曲線 C の Weierstrass 点 P_v を基点とする点付き調和体積を決定し, 群のコホモロジーを用いた組み合わせ公式を導出した.

調和体積の特徴として, $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ の 3 チェインの体積として表せること, および反復積分により直接計算できることが挙げられる. $J(X)$ を X のヤコビアンとする. 調和体積の応用の 1 つ, $J(X)$ における代数的サイクルの非自明性の証明, について説明したい. X は $J(X)$ に埋め込むことができる. Ceresa サイクルと呼ばれる $J(X)$ における代数的サイクル $X - X^-$ が得られる. このサイクルはホモロジーサイクルとして 0 であることがただちにわかる. Harris [10, 11] は X の調和体積を用いて, $J(X)$ における代数的サイクル $X - X^-$ が代数的に 0 と同値 (algebraically equivalent to 0) でないことの十分条件を与えた. このように積分を用いる手法は, Hodge の手紙 [24, pp. 533–534] において言及されている.

* 木更津工業高等専門学校 基礎学系

*¹ 以下, Riemann 面と略す. 文献は [6, 15] などを参照せよ.

*² 調和体積は“体積”と呼ばれるが, 加群から加群への準同型 $I: (H^{\otimes 3})' \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ である.

Harris [10] は調和体積を用いて, $J(F_4)$ における代数的サイクル $F_4 - F_4^-$ が代数的に 0 と同値でないことを示した. 少なくとも Riemann 面, 体 \mathbb{C} 上の非特異代数曲線, についてはここ最近まで F_4 以外の結果は知られていなかったと思われる. 本講演における主定理を与える.

Theorem 1.1 ([19]) K_4 を Klein 4 次曲線とする. このとき, $J(K_4)$ において代数的サイクル $K_4 - K_4^-$ は代数的に 0 と同値ではない.

K_4 は種数 3 の Riemann 面である. 証明は, 調和体積を計算し, その値を一般超幾何関数 ${}_3F_2$ の特殊値に帰着させるものである.

(点付き) 調和体積の他の応用・拡張については, 参考文献 [4, 5, 8, 13, 14] を参照してほしい.

目次

1	序	1
2	Riemann 面	2
2.1	超楕円曲線 $C (g \geq 2)$	3
2.2	$\mathbb{C}P^2$ における代数曲線	3
3	調和体積	3
4	超楕円曲線の調和体積	6
5	$J(X)$ における代数的サイクル	9
5.1	Ceresa サイクル	9
5.2	代数的サイクル $X - X^-$ と調和体積	10
6	Klein 曲線の調和体積	11
6.1	$H_1(K_4; \mathbb{Z})$ の基底	11
6.2	Poincaré 双対	12
6.3	K_4 の調和体積	13
6.4	近似計算と一般超幾何関数	14

2 Riemann 面

Riemann 面, 体 \mathbb{C} 上の非特異代数曲線, の具体例を挙げる.

X をコンパクト Riemann 面, 連結なコンパクト 1 次元複素多様体, とする. ある整数 $g \geq 0$ が存在し, X は種数 g の向きづけられた閉曲面と微分同相になる. $g = 0$ のとき, X の複素構造は 1 つ (複素射影直線 $\mathbb{C}P^1$) しかないが, $g \geq 1$ のときは, X は多くの複素構造を持つことが知られている. Riemann 面の例をいくつか挙げる.

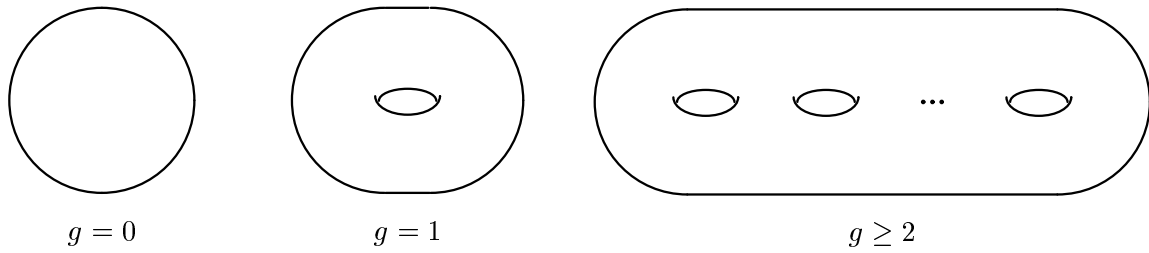


図1 閉曲面

2.1 超楕円曲線 C ($g \geq 2$)

超楕円曲線 C とは $\mathbb{C}P^1$ の $2g+2$ 点分岐 2 重被覆である. 図 2 では, 2 重分岐被覆 $\pi: C \rightarrow \mathbb{C}P^1$ の分岐点が $P_0, P_1, \dots, P_{2g+1} \in C$ であり, $\pi(P_i) = p_i \in \mathbb{C}P^1$ ($i = 0, 1, \dots, 2g+1$) となる. C は, \mathbb{C}^2 における代数曲線

$$\left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^2; w^2 = \prod_{i=0}^{2g+1} (z - p_i) \right\}$$

のコンパクト化としても表すこともできる. ただし, $p_i \neq \infty \in \mathbb{C}P^1$ とした. 2 重分岐被覆は

$$\pi: C \ni (z, w) \mapsto z \in \mathbb{C}P^1$$

と表すことができる. $\mathbb{C}P^1$ 上の点 p_i の取り方によって, C の複素構造が変化しうる.

2.2 $\mathbb{C}P^2$ における代数曲線

一般に, d 次同次既約多項式で定まる $\mathbb{C}P^2$ における非特異代数曲線 $f(X, Y, Z) = 0$ は, 種数 $(d-1)(d-2)/2$ の Riemann 面であることが知られている.

$$K_4 := \{(X: Y: Z) \in \mathbb{C}P^2 \mid X^3Y + Y^3Z + Z^3X = 0\}$$

は Klein 4 次曲線と呼ばれる種数 3 の Riemann 面である. また, N を 4 以上の整数としたとき,

$$F_N := \{(X: Y: Z) \in \mathbb{C}P^2 \mid X^N + Y^N = Z^N\}$$

は Fermat N 次曲線 F_N と呼ばれる種数 $(N-1)(N-2)/2$ の Riemann 面である.

講演者の研究手法の 1 つは, $\mathbb{C}P^1$ の分岐被覆で表される Riemann 面上で反復積分を行うことである.

3 調和体積

調和体積を定義し, 基本的な性質について述べる. X を種数 $g \geq 3$ の Riemann 面とする. まず, X 上の 1-形式に対する, X 上の道に沿った Chen [3] の (長さ 2 の) 反復積分 (iterated integral)

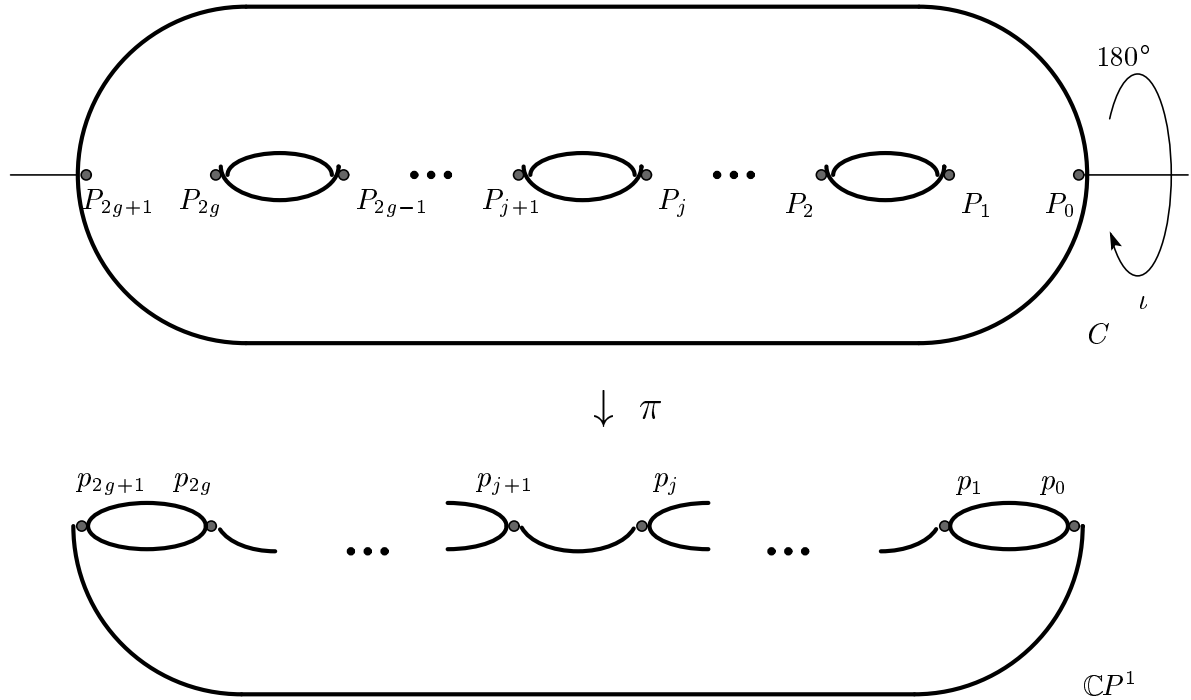


図2 2重分岐被覆 $\pi: C \rightarrow \mathbb{C}P^1$

の定義を復習する. ω_1, ω_2 を X 上の 1-形式とし, $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ を X 上の道とする. このとき, ω_1, ω_2 の γ に沿った (長さ 2 の) 反復積分は

$$\int_{\gamma} \omega_1 \omega_2 = \int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1} f_1(t_1) f_2(t_2) dt_1 dt_2$$

と定義される. ただし, f_1, f_2 は, t を単位区間 $[0, 1]$ の座標としたとき, $\gamma^*(\omega_i) = f_i(t) dt$ を満たす. 一般に, 反復積分は端点を固定したホモトピーで不変ではない. しかし, 以下の Lemma が良く知られている.

Lemma 3.1 (Chen [3])

$\omega_{1,i}, \omega_{2,i}, i = 1, 2, \dots, n$, を X 上の 1-形式とし, $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ を X 上の道とする. $\sum_{i=1}^n \int_X \omega_{1,i} \wedge \omega_{2,i} = 0$ を満たすものとする. このとき, $d\eta = \sum_{i=1}^n \omega_{1,i} \wedge \omega_{2,i}$ を満たす X 上の 1-形式 η がとれて,

$$\sum_{i=1}^n \int_{\gamma} \omega_{1,i} \omega_{2,i} - \int_{\gamma} \eta$$

は端点を固定したホモトピーで不変になる.

Remark 3.2 条件 $\sum_{i=1}^n \int_X \omega_{1,i} \wedge \omega_{2,i} = 0$ より, $d * df = \sum_{i=1}^n \omega_{1,i} \wedge \omega_{2,i}$ を満たす X 上の関数 f

がとれるので, $\eta = *df$ とおけば良い^{*3}.

さて, Chen の反復積分を用いて**調和体積 (harmonic volume)** [9] を定義しよう. まず点付き Riemann 面 (X, x_0) に対して, 点付き調和体積 (pointed harmonic volume) を定義する. 1次元コホモロジー群 $H^1(X; \mathbb{Z})$ とホモロジー群 $H_1(X; \mathbb{Z})$ を Poincaré 双対により同一視し, H と表す. Γ_g を種数 g の閉曲面 Σ_g の写像類群, つまり向きを保つ Σ_g の自己微分同相写像のイソトピー類全体のなす群, とする. このとき, 上記の Poincaré 双対は Γ_g -加群として同型になる. Hodge *作用素は, 局所座標 z を用いて, $*(f_1(z)dz + f_2(z)d\bar{z}) = -\sqrt{-1}f_1(z)dz + \sqrt{-1}f_2(z)d\bar{z}$ と定義される. * は複素構造にのみ依存し計量には依存しない. この作用素により H は “ X 上の \mathbb{Z} に周期を持つ, 実調和 1-形式全体からなる群” と同一視できる (Hodge の定理).

$$(\cdot, \cdot) : H \otimes H \ni \omega_1 \otimes \omega_2 \mapsto \int_X \omega_1 \wedge \omega_2 \in \mathbb{Z}$$

を交叉形式 (交点数) とし, その核を $(H^{\otimes 2})'$ と表す.

Definition 3.3 (Pulte, [16]) (X, x_0) に対する点付き調和体積 I_{x_0} は

$$I_{x_0} \left(\sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^{n_k} a_{i,k} \otimes b_{i,k} \right) \otimes c_k \right) = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^{n_k} \int_{\gamma_k} a_{i,k} b_{i,k} - \int_{\gamma_k} \eta_k \right) \pmod{\mathbb{Z}}$$

となる準同型 $(H^{\otimes 2})' \otimes H \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と定義される. ここで γ_k は, $H_1(X; \mathbb{Z}) \ni [\gamma_k] = (c_k$ のコホモロジー類の Poincaré 双対), となる x_0 を基点とするループである. また, η_k は以下を満たす X 上の 1-形式である

$$\begin{cases} d\eta_k = \sum_{i=1}^{n_k} a_{i,k} \wedge b_{i,k} \\ \int_X \eta_k \wedge * \alpha = 0 \text{ for any closed 1-form } \alpha \text{ on } X. \end{cases}$$

調和体積は点付き調和体積の制限で与えられる. 自然な準同型

$$p : H^{\otimes 3} \ni h_1 \otimes h_2 \otimes h_3 \mapsto ((h_1, h_2)h_3, (h_2, h_3)h_1, (h_3, h_1)h_2) \in H^{\oplus 3}$$

に対して, $(H^{\otimes 3})' = \ker p \subset (H^{\otimes 2})' \otimes H \subset H^{\otimes 3}$ とおくと, これは階数 $(2g)^3 - 6g$ の自由加群になる.

Definition 3.4 (Harris, [9]) X の調和体積 I は点付き調和体積の制限

$$I = I_{x_0}|_{(H^{\otimes 3})'}$$

で与えられる準同型 $(H^{\otimes 3})' \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ である.

^{*3} * は Hodge * 作用素である (後述).

Remark 3.5 I は x_0 のとり方に依存しない. また, 3 次対称群 \mathfrak{S}_3 の元 σ , $h_1 \otimes h_2 \otimes h_3 \in (H^{\otimes 3})'$ に対し,

$$I(h_{\sigma(1)} \otimes h_{\sigma(2)} \otimes h_{\sigma(3)}) = \text{sgn}(\sigma)I(h_1 \otimes h_2 \otimes h_3) \pmod{\mathbb{Z}}$$

が成り立つ.

一般に η_k を計算することは容易ではない (Remark 3.2). X が超楕円曲線るとき, η_k の積分がわかるので, なんとか計算ができる [18, 19]. 本講演では, $\eta_k = 0$ となる都合の良い場合に着目する.

調和体積の別の定義を与える. $h_1 \otimes h_2 \otimes h_3 \in (H^{\otimes 3})'$, 基点 $x_0 \in X$ に対して,

$$h: X \ni x \mapsto \left(\int_{x_0}^x h_1, \int_{x_0}^x h_2, \int_{x_0}^x h_3 \right) \in \mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3$$

と定める. $h(X) \subset \mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3$ を特異 2 チェインとみなすと, $\partial c_3 = h(X)$ となる $\mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3$ 上の特異 3 チェイン c_3 がとれる. c_3 の取り方は一意に定まらないことに注意せよ.

Definition 3.6 x_1, x_2, x_3 を, $h^*(dx_i) = h_i$, ($i = 1, 2, 3$) となる $\mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3$ 上の座標とする. このとき, 調和体積 $I: (H^{\otimes 3})' \rightarrow \mathbb{R} / \mathbb{Z}$ を次のように定める.

$$I(h_1 \otimes h_2 \otimes h_3) = \int_{c_3} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Stokes の定理を用いて, 以下を示すことができる.

Proposition 3.7 (Harris, [9]) 調和体積の 2 つの定義は一致する.

Riemann 面のモジュライ空間を \mathbb{M}_g とおく. 種数 g の Riemann 面全体を, 双正則同型により同一視した空間である. 調和体積は \mathbb{M}_g 上の $\text{Hom}((H^{\otimes 3})', \mathbb{R} / \mathbb{Z})$ に値を持つ連続な切断とみなすことができる. 調和体積を解析することにより, \mathbb{M}_g の構造の理解が深まるであろう.

4 超楕円曲線の調和体積

講演者は, 超楕円曲線の調和体積 [18], および Weierstrass 点を基点とする点付き調和体積 [19] を決定した. ここでは, 後者で得られる組み合わせ公式を紹介することにする*4.

流れを述べる. Weierstrass 点 P_ν を固定し, $I_{P_\nu} = I_\nu$ と記す. $I_\nu \in \text{Hom}((H^{\otimes 2})' \otimes H, \mathbb{Z}_2)$ とみなせる. ただし, $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$ である. $A \in (H^{\otimes 2})' \otimes H$ を \mathbb{Z}_2 上で考えて,

$$A \pmod{2} = \sum_{p,q,r \neq \nu} A_{p,q,r} f_p \otimes f_q \otimes f_r$$

とみなす. f_j は, 簡単に言うと, 図 3 の e_j から得られる $H_{\mathbb{Z}_2}$ の元である. I_ν は, $\frac{1}{2}\mathbb{Z} / \mathbb{Z}$ に値を持つ A から得られる数え上げ関数で記述される.

*4 本講演ではほとんど触れない予定である.

Theorem 4.1

$$I_\nu(A) = \kappa(A) \bmod \mathbb{Z}.$$

C を §2.1 で定めたように代数曲線 $\left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^2; w^2 = \prod_{i=0}^{2g+1} (z - p_i) \right\}$ のコンパクト化とし, C 上の正則自己同型

$$\iota: C \ni (z, w) \mapsto (z, -w) \in C$$

を超楕円対合と呼ぶ. 超楕円曲線では, 分岐点 $\{P_i\}_{i=0,1,\dots,2g+1}$ は Weierstrass 点であり, それ以外はそうではないことが知られている. 超楕円対合 ι は, H にマイナス倍で作用し, I_ν を保つので, $I_\nu = (-1)^3 I_\nu \bmod \mathbb{Z}$ から, 以下を得る.

Proposition 4.2 $I_\nu = 0$ or $1/2 \bmod \mathbb{Z}$.

C 上の \mathbb{Z}_2 係数 1 次元ホモロジー群 $H_1(C; \mathbb{Z}_2) = H_{\mathbb{Z}_2}$ の生成元について説明する. 図 3 のように, $Q_0, Q_1 = (\iota(Q_0))$ をとり, C 上の道 e_j を自己交差を持たない道で Q_0, P_j, Q_1 を結ぶ道とする. $e_{j_1} \cdot \iota(e_{j_2})$ は C 上の Q_0 を基点とするループであることがわかる. ただし, $e_{j_1} \cdot \iota(e_{j_2})$ は, e_{j_1}

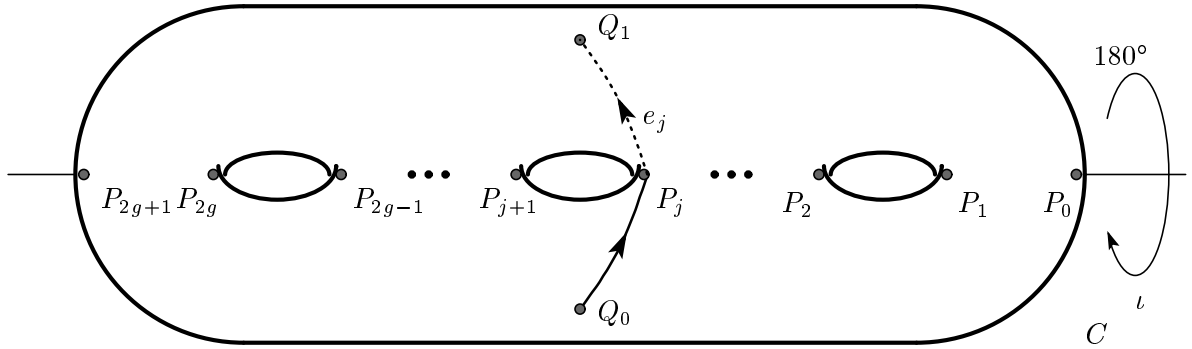


図 3 C 上の道 e_j

を先に通る, その後 $\iota(e_{j_2})$ を通る道を表すものとする. 基点 Q_0 を固定したホモトピー同値関係

$$e_j \cdot \iota(e_j) \sim 1, \quad j = 0, 1, \dots, 2g + 1,$$

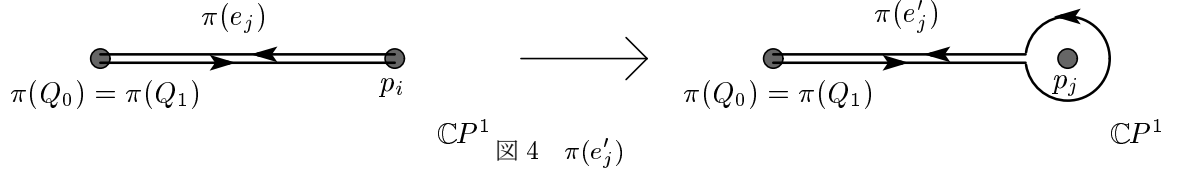
$$e_0 \cdot \iota(e_1) \cdots e_{2g} \cdot \iota(e_{2g+1}) \sim 1,$$

を得る.

分岐点集合を $B = \{p_i\}_{i=0,1,\dots,2g+1}$ とおく. C 上の道 e_j を P_j の近傍のみ変形し, π の像が図 4 のようになる C 上の道 e'_j を定める. $\{\pi(e'_j)\}_{j=0,1,\dots,2g}$ が $H_1(\mathbb{C}P^1 \setminus B; \mathbb{Z}_2)$ の基底になる. また, $\sum_{j=0}^{2g+1} \pi(e'_j) = 0$ が成り立つ.

線形写像

$$v: H_{\mathbb{Z}_2} \ni e'_{j_1} \cdot \iota(e'_{j_2}) \mapsto \pi(e'_{j_1}) + \pi(e'_{j_2}) \in H_1(\mathbb{C}P^1 \setminus B; \mathbb{Z}_2)$$



と定めるとこれは単射になり，完全系列を得る (Arnol'd [1]).

$$0 \longrightarrow H_{\mathbb{Z}_2} \xrightarrow{\nu} H_1(\mathbb{C}P^1 \setminus B; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0.$$

ここで， $\varepsilon: H_1(\mathbb{C}P^1 \setminus B; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ は添加写像 $\varepsilon(\pi(e'_j)) = 1$ である. Weierstrass 点 P_ν を固定する. $H_{\mathbb{Z}_2}$ を $\ker \varepsilon$ と同一視することによって， $H_{\mathbb{Z}_2}$ の元 $f_j = \pi(e'_\nu) + \pi(e'_j)$, $j = 0, 1, \dots, 2g + 1$ を定める. $f_\nu = 0 \in H_1(\mathbb{C}P^1 \setminus B; \mathbb{Z}_2)$ に注意. また， $f_0 + f_1 + \dots + f_{2g+1} = 0$ が成立する.

Proposition 4.3 $H_{\mathbb{Z}_2}$ は $f_0, f_1, \dots, f_{2g+1}$ で生成される.

超楕円の写像類群 Δ_g を写像類群 Γ_g の ι による中心化群

$$\Delta_g = \{\varphi \in \Gamma_g; \varphi\iota = \iota\varphi\},$$

とする. ただし， ι は超楕円対合である. 固定した ν に対して，

$$\Delta_{g,\nu} = \{\varphi \in \Delta_g; \varphi(P_\nu) = P_\nu\}$$

と定める. \mathfrak{S}_{2g+1} を $(2g + 1)$ 次対称群とする. 自然な射影 $\Delta_{g,\nu} \rightarrow \mathfrak{S}_{2g+1}$ に対して， $\mathbb{Z}_2\Delta_{g,\nu}$ -加群 $H_{\mathbb{Z}_2}$ は $\mathbb{Z}_2\mathfrak{S}_{2g+1}$ -加群とみなすことができる.

Proposition 4.4

$$I_\nu \in \text{Hom}_{\Delta_{g,\nu}}((H^{\otimes 2})' \otimes H, \mathbb{Z}_2) = \text{Hom}_{\mathfrak{S}_{2g+1}}((H_{\mathbb{Z}_2})^{\otimes 3}, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2.$$

さらに， $\text{Hom}_{\mathfrak{S}_{2g+1}}((H_{\mathbb{Z}_2})^{\otimes 3}, \mathbb{Z}_2)$ の非自明な元 ψ は，

$$\psi(f_i \otimes f_j \otimes f_k) = \begin{cases} 1 & \text{for } \#\{i, j, k\} = 2, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

を満たす \mathfrak{S}_{2g+1} -準同型 $(H_{\mathbb{Z}_2})^{\otimes 3} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ である.

これを利用して，組み合わせ公式を作る. $(H^{\otimes 2})' \otimes H$ 任意の元 A を \mathbb{Z}_2 係数上で考え，

$$A \pmod{2} = \sum_{p,q,r \neq \nu} A_{p,q,r} f_p \otimes f_q \otimes f_r$$

と表すことにする. ただし， $A_{p,q,r} \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ である. 数え上げ関数 $\kappa: K \otimes H \rightarrow \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ を

$$\kappa(A) = \frac{1}{2} \#\{(p, q, r); A_{p,q,r} = 1, \#\{p, q, r\} = 2\} \pmod{\mathbb{Z}}$$

と定めると，定理 4.1 を得る.

5 $J(X)$ における代数的サイクル

5.1 Ceresa サイクル

X のヤコビアン $J(X)$ における代数的サイクル, 特に $X - X^-$ に関して述べる. $X - X^-$ と Griffiths の Abel-Jacobi 写像を通じて, 調和体積との関係について述べる.

X から $J(X)$ への Abel-Jacobi 写像 $A: X \rightarrow J(X)$ は埋め込みであること ($g \geq 3$ に注意) が知られている. この A によって, $X \subset J(X)$ とみなすことにする. $X^- = \{-x \in J(X); x \in X\}$ と定める. \mathcal{A}^1 を $J(X)$ 上の代数的 1-サイクル全体とする. このとき, $H^2(J(X); \mathbb{Z}) \cong \wedge^2 H^1(J(X); \mathbb{Z})$ より, $X - X^- \in \mathcal{A}^1$ はホモロジーサイクルとして 0 であることがわかる. この代数的サイクル $X - X^-$ は Ceresa サイクルと呼ばれる.

Definition 5.1 $X - X^- \sim 0$ (algebraically equivalent to 0) とは, 非特異代数曲線 C_0 と, \mathcal{A}^1 上の族 $\{V_t\}_{t \in C_0} \subset J(X)$ が存在し,

$$V_t = X, V_s = X^-$$

が成り立つこと.

簡単に言えば, $X - X^- \sim 0$ とは, X を, C_0 をパラメータとして X^- に変形できることである. Weil [23, pp. 331] は $X - X^- \sim 0$ について言及している. Ceresa は次の定理を示した.

Theorem 5.2 (Ceresa, [2]) X が generic な非特異代数曲線ならば, $X - X^- \not\sim 0$ となる.

Remark 5.3 X が超楕円曲線るとき, $X - X^- \sim 0$ である.

問題

$X - X^- \not\sim 0$ となる X の具体例を挙げよ.

なお, $X - X^- \not\sim 0$ とは, Griffiths 群の元として非自明であることも意味する. そのような具体的な X はほとんど知られていなかった. 最初の例は Harris により発見された.

Theorem 5.4 (Harris, [10]) Fermat 4 次曲線 F_4 に対して, $F_4 - F_4^- \not\sim 0$ が成り立つ.

Harris は F_4 の周期が $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ に値を持つ正則 1-形式に着目し, $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ に値を持つ調和体積を用いて, 上記の事実を示した. ただ, F_4 の特殊性を利用して, F_4 と F_6 以外の曲線にこの手法をそのまま適用することはできない.

5.2 代数的サイクル $X - X^-$ と調和体積

自然な射影 $j_2: H^{\otimes 3} \rightarrow \wedge^3 H$ を用いて, 短完全列からなる可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (H^{\otimes 3})' & \longrightarrow & H^{\otimes 3} & \xrightarrow{p} & H^{\oplus 3} \longrightarrow 0 \\ & & j_1 \downarrow & & j_2 \downarrow & & j_3 \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (\wedge^3 H)' & \longrightarrow & \wedge^3 H & \longrightarrow & H \longrightarrow 0 \end{array}$$

を満たすように $(\wedge^3 H)'$ を定める. ただし,

$$j_2(h_1 \otimes h_2 \otimes h_3) = h_1 \wedge h_2 \wedge h_3, \quad j_3(h_1, h_2, h_3) = h_1 + h_2 + h_3$$

であり, j_1 は j_2 の制限とする. $\mathcal{A}_{\text{hom}}^1$ を \mathcal{A}^1 においてホモロジーサイクルとして 0 となるもの全体とする. α を $J(X)$ 上の Kähler 形式*5 とカップ積をとる写像とし,

$$H_{\text{prim}}^3(J(X); \mathbb{Z}) := \ker(\alpha^{g-2}: H^3(J(X); \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2g-1}(J(X); \mathbb{Z}))$$

とする.

Lemma 5.5 $(\wedge^3 H)' \subset \wedge^3 H = \wedge^3 H^1(J(X); \mathbb{Z}) = H^3(J(X); \mathbb{Z})$ により, $(\wedge^3 H)'$ を $H^3(J(X); \mathbb{Z})$ の部分加群とみなす. このとき,

$$(\wedge^3 H)' \cong H_{\text{prim}}^3(J(X); \mathbb{Z})$$

が成り立つ.

上記の状況で, Griffiths の Abel-Jacobi 写像は

$$\varphi: \mathcal{A}_{\text{hom}}^1 \ni \partial W \rightarrow \left(\omega \mapsto \int_W \omega \right) \in \text{Hom}((\wedge^3 H)', \mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

と定義される. ただし, $\omega \in (\wedge^3 H)' = H_{\text{prim}}^3(J(X); \mathbb{Z})$: 3-形式である ([7], [16]).

Theorem 5.6 (Harris [9], [11]). ν を φ の像 $\varphi(X - X^-)$ とする. このとき,

$$\nu \in \text{Hom}(H_{\text{prim}}^3(J; \mathbb{Z}), \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}((\wedge^3 H)', \mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

となり, ν は以下の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccc} (H^{\otimes 3})' & \xrightarrow{2I} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ j_1 \downarrow & \nearrow \nu & \\ (\wedge^3 H)' & & \end{array}$$

*5 ここでは $\sum_{i=1}^g a_i \wedge b_i$ と表される. ただし, $\{a_i, b_i\}_{i=1,2,\dots,g} \subset H = H^1(J(X); \mathbb{Z})$ はシンプレクティック基底である.

ν は中間 Jacobi 多様体 (ここでは $\text{Hom}((\wedge^3 H)', \mathbb{R}/\mathbb{Z}))$ の元とみなせる. 調和体積の 2 つ目の定義と Theorem 5.6 を用いると Proposition 5.7 を得る ([10], [11]). $H_{\mathbb{C}} = H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ とし, X 上の正則 1-形式全体を $H^{1,0} \subset H_{\mathbb{C}}$ と表す. $\overline{H^{1,0}} = H^{0,1}$ とおけば, Hodge 分解により $H_{\mathbb{C}} = H^{1,0} + H^{0,1}$ である.

Proposition 5.7 $\omega \in (H^{\otimes 3})'$ の元が, $j_1(\omega) \in \wedge^3 H \cap (\wedge^3 H^{1,0} + \wedge^3 H^{0,1})$ を満たすとき, $J(X)$ において $X - X^- \sim 0$ ならば,

$$2I(\omega) = 0 \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Remark 5.8 $j_1(\omega) \in \wedge^3 H \cap (\wedge^3 H^{1,0} + \wedge^3 H^{0,1})$ が成立すると, $\wedge^3 H^{1,0} + \wedge^3 H^{0,1}$ の元であることから, $j_1(\omega) \in (\wedge^3 H)'$ が言える.

これより, 以下を得る.

Corollary 5.9 $j_1(\omega) \in \wedge^3 H \cap (\wedge^3 H^{1,0} + \wedge^3 H^{0,1})$ かつ, $2I(\omega) \neq 0 \pmod{\mathbb{Z}}$ が成り立つならば, $J(X)$ において $X - X^- \not\sim 0$ である.

6 Klein 曲線の調和体積

Klein 4 次曲線 K_4 に対して, $H_1(K_4; \mathbb{Z})$ と $H^{1,0}$ の元を用いて Poincaré 双対を記述することによって, $j_1(\omega) \in \wedge^3 H \cap (\wedge^3 H^{1,0} + \wedge^3 H^{0,1})$ を満たす $\omega \in (H^{\otimes 3})'$ を見つける. 調和体積 $2I(\omega)$ を一般超幾何関数 ${}_3F_2$ の特殊値を用いて記述する. その結果, 定理 1.1 を得る.

K_4 とは, $X^3Y + Y^3Z + Z^3X = 0$ で定義される $\mathbb{C}P^2$ における代数曲線であり, 種数 3 の Riemann 面であった. その美しさについては, [17] を参照すると良い. $x = X^3Y^{-2}Z^{-1} + 1$, $y = -XY^{-1}$ とおくことにより, K_4 は

$$y^7 = x(1-x)^2$$

で定まる代数曲線とすることができる. この表示を用いて,

$$\pi: K_4 \ni (x, y) \mapsto x \in \mathbb{C}P^1$$

は, 3 点 $0, 1, \infty$ で分岐する 7 重被覆であることがわかる.

6.1 $H_1(K_4; \mathbb{Z})$ の基底

単位区間 $[0, 1] \subset \mathbb{C}P^1$ の逆像 $f^{-1}([0, 1])$ を用いて, $H_1(K_4; \mathbb{Z})$ の基底を求める. その手法は, Hurwitz 系 [22] と呼ばれる. 代数幾何では, $f^{-1}([0, 1])$ を dessins d'enfants と呼ぶ.

7 重分岐被覆 π の単位区間 $[0, 1]$ のリフト

$$e_0: [0, 1] \ni t \mapsto (t, y_0(t)) \in K_4$$

をとる (図 5). ただし, $y_0(t) = \sqrt[7]{t(1-t)^2}$ は, $t \in [0, 1]$ に関する実解析関数である. 被覆変換群の生成元として, K_4 の正則自己同型を $\sigma(x, y) = (x, \zeta y)$ と定める. ただし, $\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/7)$

である. $k = 1, 2, \dots, 6$ に対して, K_4 上のループ c_k を

$$c_k = \sigma_*^k(e_0) \cdot e_0^{-1}$$

と定める. K_4 上の $(0, 0)$ を基点とするループとして, $\ell_k = \sigma_*^{k-1}(e_0) \cdot \sigma_*^k(e_0)^{-1}, k = 1, 2, \dots, 7$ と定める (図 6). c_k, ℓ_k のホモロジー類をそれぞれ $c_k, \ell_k \in H_1(K_4; \mathbb{Z})$ とそのまま記すことにす

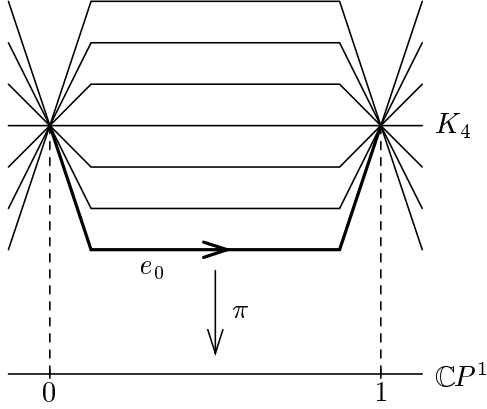


図 5 e_0

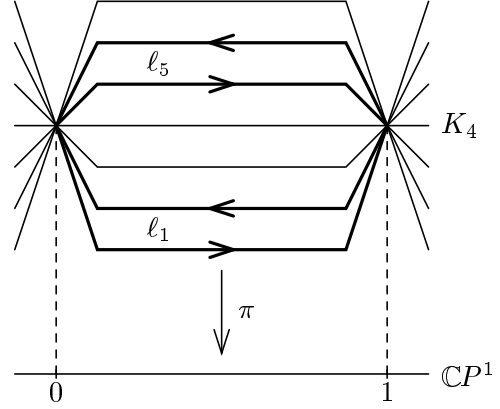


図 6 ℓ_1 と ℓ_5

る. 交点数 $(,) : H_1(K_4; \mathbb{Z}) \otimes H_1(K_4; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ であった. Hurwitz 系 [22] を用いると,

$$(c_1, c_k) = \begin{cases} 0 & \text{if } k = 1, 2, 4, 6, \\ 1 & \text{if } k = 3, 5, \end{cases}$$

を得る. この計算により,

$$(\ell_1, \ell_k) = (c_1, c_k) - (c_1, c_{k-1}) = \begin{cases} 0 & \text{if } k = 1, 2, \\ 1 & \text{if } k = 3, 5, \\ -1 & \text{if } k = 4, 6. \end{cases}$$

がただちに得られる. K_4 上の正則自己同型 $\sigma(x, y) = (x, \zeta^k y)$ に対して, $\sigma_*(\ell_k) = \ell_{k+1}$ がわかり, $(\ell_i, \ell_j) = (\sigma_*(\ell_i), \sigma_*(\ell_j)) = (\ell_{i+1}, \ell_{j+1})$ が成り立つ. 交点行列を計算することで以下の結果を得る.

Proposition 6.1 $\{\ell_k\}_{k=1,2,\dots,6}$ は $H_1(K_4; \mathbb{Z})$ の基底である.

6.2 Poincaré 双対

C 上の正則 1-形式全体の空間の基底として,

$$\omega'_1 = \frac{(1-x)dx}{y^6}, \omega'_2 = \frac{(1-x)dx}{y^5}, \omega'_3 = \frac{dx}{y^3}$$

をとれることが知られている. $u, v > 0$ に対して, ベータ関数を

$$B(u, v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt$$

と定める. 記述を簡単にするため $(h_1, h_2, h_3, h_4) = (1/7, 2/7, 4/7, 1/7)$, $\xi_i = \zeta^{7h_i}$ とする. ω'_i の ℓ_k に沿った積分が得られる.

Proposition 6.2

$$\int_{\ell_k} \omega'_i = (\xi_i^k - \xi_i^{k-1})B(h_i, h_{i+1}).$$

Remark 6.3 この積分は ω'_j のコホモロジー類と ℓ_k のホモロジー類のみに依存する.

$\omega_i = \omega'_i/B'_i$, $i = 1, 2, 3$ と定める. $B'_i = B(h_i, h_{i+1})$ とした. また, $L_k \in H_1(K_4; \mathbb{C})$ を $\sum_{i=1}^7 \zeta^{ik} \ell_k$ と表し, Poincaré 双対を P.D.: $H^1(K_4; \mathbb{C}) \rightarrow H_1(K_4; \mathbb{C})$ と表す. $\sigma_* L_k = \zeta^{-k} L_k$ から, σ の固有値を利用する.

Proposition 6.4 定数 $\lambda_i = -1/(\xi_i^3(\xi_i^2 + 1)) \in \mathbb{C}$ とするとき,

$$\text{P.D.}(\omega_i) = \lambda_i L_{7h_i}$$

である.

Remark 6.5 $\text{P.D.}(\bar{\omega}_i) = \bar{\lambda}_i \bar{L}_{7h_i}$ となる.

6.3 K_4 の調和体積

いよいよ, 調和体積のを計算する. $t \in [0, 1]$ に対して, $f_i = e_0^* \omega'_i$ を $[0, 1]$ 上の実 1-形式 $t^{h_i-1}(1-t)^{h_{i+1}-1} dt$, $i = 1, 2, 3$ とする. 反復積分により定まる定数を次のように定める

$$x_{i,j} = \int_{\gamma} f_i f_j / (B'_i B'_j).$$

ここで, γ は道 $[0, 1] \ni t \mapsto t \in [0, 1]$ とする. $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ の ℓ_k に沿った反復積分が計算できる.

Lemma 6.6 ℓ_k を $(\xi, \eta) = (0, 0)$ を基点とするループとする. このとき以下が得られる

$$\int_{\ell_k} \omega_i \omega_j = (\xi_i \xi_j)^{k-1} (1 - \xi_i \xi_j) x_{i,j} + (\xi_i \xi_j)^{k-1} (\xi_i \xi_j - \xi_j).$$

Remark 6.7 ω_i が閉 1 次形式で $\omega_i \wedge \omega_j = 0$ なので, これらの反復積分は端点を固定したホモトピーで不変である.

$\wedge^3 H \cap (\wedge^3 H^{1,0} + \wedge^3 H^{0,1})$ の元を見つけるために, $(H_{\mathbb{C}})^{\otimes 3}$ の元として,

$$D = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \text{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1)} \otimes \omega_{\sigma(2)} \otimes \omega_{\sigma(3)}$$

$$\bar{D} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \text{sgn}(\sigma) \bar{\omega}_{\sigma(1)} \otimes \bar{\omega}_{\sigma(2)} \otimes \bar{\omega}_{\sigma(3)}$$

とする. Proposition 6.4, $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$, ガロア理論の初歩を用いた考察により, 次の補題を得る.

Lemma 6.8

$$\frac{D + \bar{D}}{7}, \frac{D - \bar{D}}{\sqrt{-7}} \in (H^{\otimes 3})'$$

つまり,

$$j_1 \left(\frac{D + \bar{D}}{7} \right), j_1 \left(\frac{D - \bar{D}}{\sqrt{-7}} \right) \in \wedge^3 H \cap (\wedge^3 H^{1,0} + \wedge^3 H^{0,1}).$$

Remark 6.9 K_4 上の正則自己同型全体 $\text{Aut}(K_4) = \text{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ の指標を用いて, $H^0(\text{Aut}(K_4); H_{\mathbb{C}}^{\otimes 3}) = \mathbb{C}^2$ を得る. これより, $H^0(\text{Aut}(K_4); H^{\otimes 3}) = \mathbb{Z}^2$ であり, $\left\{ \frac{D + \bar{D}}{7}, \frac{D - \bar{D}}{\sqrt{-7}} \right\}$ が $H^0(\text{Aut}(K_4); (H^{\otimes 3})')$ の生成元であることがわかる.

Proposition 6.4, Lemma 6.6 を用いると, 次の結果を得る.

Theorem 6.10

$$\begin{aligned} I \left(\frac{D + \bar{D}}{7} \right) &= 0 \quad \text{mod } \mathbb{Z}, \\ I \left(\frac{D - \bar{D}}{\sqrt{-7}} \right) &= \frac{28}{\sqrt{-7}} \left(\frac{\zeta^2 - \zeta^6}{\zeta + 1} x_{1,2} + \frac{\zeta^4 - \zeta^5}{\zeta^2 + 1} x_{2,3} + \frac{\zeta - \zeta^3}{\zeta^4 + 1} x_{3,1} \right) \quad \text{mod } \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Remark 6.11 この値は, もっと簡潔にすることが出来る.

$$I \left(\frac{D - \bar{D}}{\sqrt{-7}} \right) = \frac{192\pi^4 y_0}{\Gamma(1/7)^2 \Gamma(2/7)^2 \Gamma(4/7)^2} \quad \text{mod } \mathbb{Z}$$

ただし,

$$y_0 = \frac{{}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1/7, 3/7, 5/7 \\ 1, 8/7 \end{matrix}; 1 \right)}{\Gamma(8/7)\Gamma(6/7)}$$

である. このことを指摘していただいた九州大学の落合氏に感謝したい. なお, この計算の簡潔化の幾何的意味はよくわかっていない.

6.4 近似計算と一般超幾何関数

目標

$$2I \left(\frac{D - \bar{D}}{\sqrt{-7}} \right) \not\equiv 0 \quad \text{mod } \mathbb{Z}.$$

目標が達成されれば, Corollary 5.9 より, $K_4 - K_4^- \neq 0$ がわかる.

反復積分 $\int_{\gamma} f_i f_j$ の値に, 一般超幾何関数 ${}_3F_2$ の特殊値が表れることに触れる. ガンマ関数 $\Gamma(y) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{y-1} dt$ ($y > 0$) に対して, Pochhammer 記号

$$(\alpha, n) = \Gamma(\alpha + n) / \Gamma(\alpha) \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

と定める.

Definition 6.12 $x \in \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2 > -1$ に対して, 一般超幾何関数 ${}_3F_2$ は以下のように定義される.

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \\ \beta_1, \beta_2 \end{matrix}; x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1, n)(\alpha_2, n)(\alpha_3, n)}{(\beta_1, n)(\beta_2, n)(1, n)} x^n.$$

積分計算により, 一般超幾何関数 ${}_3F_2$ の特殊値と反復積分 $\int_{\gamma} f_i f_j$ を結びつけることができる.

Proposition 6.13 $\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq v \leq 1, 0 \leq u \leq v\}$, $a, b, p, q > 0, b < 1$ とする. このとき,

$$\int_{\Delta} u^{a-1} (1-u)^{b-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} dudv = \frac{B(a+p, q)}{a} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} a, 1-b, a+p \\ 1+a, a+p+q \end{matrix}; 1 \right).$$

この Proposition を利用して, 数式処理ソフト Mathematica による近似計算を行う.

Lemma 6.14 $X = K_4$: Klein 曲線のとき,

$$2I \left(\frac{D - \overline{D}}{\sqrt{-7}} \right) = 0.72270 \pm 1 \times 10^{-5} \pmod{\mathbb{Z}}.$$

$2I \left(\frac{D - \overline{D}}{\sqrt{-7}} \right) \not\equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$ により, Corollary 5.9 を用いると, 定理 1.1 を得る.

さらに, Harris [10, 11] の計算を利用して, 講演者 [21] は Fermat 6 次曲線 F_6 に関しても同様の結果を導いた. Harris と講演者の結果を拡張した, 千葉大学の大坪氏の結果 [12] も紹介する予定である.

参考文献

- [1] Arnol'd, V. I.: *A remark on the branching of hyperelliptic integrals as functions of the parameters*. Funkcional. Anal. i Priložen. **2** 1968 no. 3, 1–3.
- [2] Ceresa, G.: *C is not algebraically equivalent to C⁻ in its Jacobian*. Ann. of Math. (2) **117** (1983), no. 2, 285–291.
- [3] Chen, Kuo Tsai: *Algebras of iterated path integrals and fundamental groups*. Trans. Amer. Math. Soc. **156** 1971 359–379.
- [4] Colombo, Elisabetta: *The mixed Hodge structure on the fundamental group of hyperelliptic curves and higher cycles*. J. Algebraic Geom. **11** (2002), no. 4, 761–790.
- [5] Faucette, William M: *Harmonic volume, symmetric products, and the Abel-Jacobi map*. Trans. Amer. Math. Soc. **335** (1993), no. 1, 303–327.
- [6] Farkas, H. M.; Kra, I: *Riemann surfaces. Second edition*. Graduate Texts in Mathematics, **71**. Springer-Verlag, New York, 1992.

- [7] Griffiths, Phillip A.: *Periods of integrals on algebraic manifolds. III. Some global differential-geometric properties of the period mapping*. Inst. Hautes E'tudes Sci. Publ. Math. No. **38** 1970 125–180.
- [8] Hain, Richard; Matsumoto, Makoto: *Galois actions on fundamental groups of curves and the cycle $C - C^-$* . J. Inst. Math. Jussieu **4** (2005), no. 3, 363–403.
- [9] Harris, Bruno: *Harmonic volumes*. Acta Math. **150** (1983), no. 1-2, 91–123.
- [10] Harris, Bruno: *Homological versus algebraic equivalence in a Jacobian*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **80** (1983), no. 4 i., 1157–1158.
- [11] Harris, Bruno: *Iterated integrals and cycles on algebraic manifolds*. Nankai Tracts in Mathematics, **7**. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2004.
- [12] Otsubo, Noriyuki: *Harmonic volume of the Fermat curve*. preprint.
- [13] Kaenders, Rainer H.: *The mixed Hodge structure on the fundamental group of a punctured Riemann surface*. Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), no. 5, 1271–1281.
- [14] Kawazumi, Nariya: *Harmonic Magnus expansion on the universal family of Riemann surfaces*. e-Print arXiv:math/0603158.
- [15] Narasimhan, Raghavan: *Compact Riemann surfaces*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.
- [16] Pulte, Michael J.: *The fundamental group of a Riemann surface: mixed Hodge structures and algebraic cycles*. Duke Math. J. **57** (1988), no. 3, 721–760.
- [17] Edited by Silvio Levy: *The eightfold way. The beauty of Klein's quartic curve*. Mathematical Sciences Research Institute Publications, **35**. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [18] Tadokoro, Yuuki: *The harmonic volumes of hyperelliptic curves*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005), no. 3, 799–820.
- [19] Tadokoro, Yuuki: *The pointed harmonic volumes of hyperelliptic curves with Weierstrass base points*. Kodai Math. J. **29** (2006), no. 3, 370–382.
- [20] Tadokoro, Yuuki: *A nontrivial algebraic cycle in the Jacobian variety of the Klein quartic*. Mathematische Zeitschrift. **260** (2008), no. 2, 265–275.
- [21] Tadokoro, Yuuki: *A nontrivial algebraic cycle in the Jacobian variety of the Fermat sextic*. Tsukuba J. Math. **33** (2009), no. 1, 29–38.
- [22] Tretkoff, C. L.; Tretkoff, M. D.: *Combinatorial group theory, Riemann surfaces and differential equations*. Contributions to group theory, 467–519, Contemp. Math., **33**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.
- [23] Weil, Andre: *Foundations of algebraic geometry*. American Mathematical Society, Providence, R.I. 1962.
- [24] Weil, Andre: *Scientific works. Collected papers. Vol. II (1951–1964)*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1979.