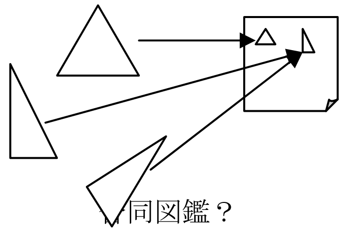
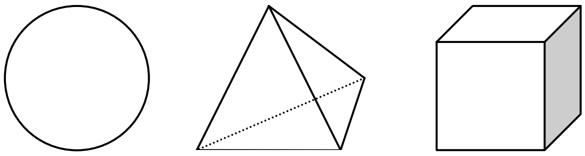
トポロジーとは

幾何学とは、大雑把に言うと図形を分類する学問です。その一分野であり、「柔らかい幾何学」とも呼ばれるトポロジー(Topology)がどんな学問なのか、(独断と偏見による)説明をしたいと思います。みなさんが中学校で習った(ユークリッド)幾何は簡単に言うと、合同や相似によって図形を分類していたわけです。たとえば、△ABC と△PQR が合同(△ABC≡△PQR)となるのを、△ABC と△PQR が“同じ”ものだとみなして分類していきます。３角形と言う“生物”を“合同図鑑”で分類していく、と言うイメージでしょうか。



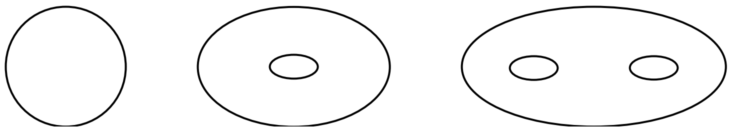
合同図鑑？

トポロジーでは、図形をゴム膜として伸びたり縮んだりして移りあうものは“同じ”とみなします。たとえば、球面、正 4 面体、立方体などの曲面(多面体)はすべて“同じ”とみなせます。



球面　　正４面体　　立方体

すべての曲面は“同じ”でしょうか？答えは No です。本質的な制限ではありませんが、条件を閉曲面(だいたい、境界のないと言う意味)に限定しておきます。閉曲面Σ_gとは穴の個数、種数と呼ぶ、が g 個のドーナツの表面のようなものです。g=0 のときは球面を表します。



球面Σ_0　　トーラスΣ_1　　種数２の閉曲面Σ_2

次の「**閉曲面の分類定理**」が知られています。

２つの閉曲面Σ_gは種数 g が一致すれば“同じ”図形であり、g が異なれば“同じ”ではない

この定理によって、閉曲面の位相構造は種数によって完全に分類されている、とも言われます。この分類は完全に終わったとも言え、研究することがないように思えます。しかし、そうではありません。私は、Σ_gの「複素構造」に興味を持ち研究しています。閉曲面を、$3+4\sqrt{-1}$と言った複素数を用いて分類するわけです。なんだがよくわからないですね。上記のΣ_2と代数方程式$y^2=x^6-1$が結びついてしまったりもします。この話は代数幾何と言う分野とも深いつながりがあります。

話は変わって、トポロジーの別の話題になります。耳にした方もいるかもしれませんが。約 100 年前に提唱された「**ポアンカレ予想**」が、ロシアの数学者によって解決されたと言うニュースがあります。閉曲面、球面をそれぞれ閉２次元多様体、２次元球面と呼ぶと、

閉３次元多様体 X はそれ上のすべての“わっか”が縮んでしまうとき、３次元球面と“同じ”である

と言う予想です。証明は、あまりトポロジーと関係なさそうな微分方程式が活躍すると言うのを聞いてびっくりしました。