RIMS Kôkyûroku Bessatsu
Bx (200x), 000–000

ℓ 進 Riemann-Roch 公式（加藤和也氏との共同研究）

By

斎藤　毅*

Abstract

局所体上の多様体上の ℓ 進層に対し、その暴分岐の不変量として、Swan 類が還元上の 0 輪体類として定義される．この Swan 類の変種に対して，Riemann-Roch 型の公式が示される．これは，ℓ 進層の導手公式の相対化である．

§ 1.　ℓ 進 Riemann-Roch 公式

はじめに ℓ 進 Riemann-Roch 公式の枠組みを考える．k を体とし，ℓ を k の標数とは異なる素数とする．k 上の有限型分離スキーム U に対し，U 上の構成可能 $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ 層の圏の Grothendieck 群を $K_0(U,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ で表す．$K_0(U,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ は U 上の構成可能 $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ 層 $\mathcal{F}$ の類 $[\mathcal{F}]$ で生成され，完全列 $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ に対し $[\mathcal{F}] = [\mathcal{F}'] + [\mathcal{F}'']$ である．

$f\colon U \to V$ を，k 上の有限型分離スキームの射とする．U 上の構成可能 $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ 層 $\mathcal{F}$ に対し，$f_!([\mathcal{F}]) = \sum_q (-1)^q [R^q f_! \mathcal{F}]$ とおくことで，可換群の射 $f_!\colon K_0(U,\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \to K_0(V,\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ が定義される．ℓ 進 Riemann-Roch 公式の問題とは，k 上の有限型分離スキームの圏から可換群の圏への共変関手 F と，関手の射 $K_0(-,\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \to F$ をみつける問題と考えられる．つまり，次の可換図式を構成せよという問題である：

$$\begin{array}{ccc}
K_0(U,\bar{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{f_!} & K_0(V,\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \\
\downarrow & & \downarrow \\
F(U) & \xrightarrow{f_!} & F(V).
\end{array}$$

k が複素数体 $\mathbb{C}$ の場合には，関手 F として特異ホモロジーをとり，関手の射を Chern 類を使って定義することで，MacPherson により，この問題は解決されている [6].

Received April 20, 200x. Revised September 11, 200x.
2000 Mathematics Subject Classification(s): Primary 14F20; Secondary 11G25, 11S15.
Key Words: *etale cohomology, local fields, Galois representations*
Partly supported by JSPS Grants-in-aid for Scientific Research B-18340002 and S-19104001
*東京大学数理科学研究科 153-8914, 東京都目黒区駒場 3-8-1
e-mail: `t-saito@ms.u-tokyo.ac.jp`

k を正標数の代数閉体とする．この場合は一般には未解決だが，$V = \mathrm{Spec}\ k$ とすれば次のようになる．$K_0(\mathrm{Spec}\ k, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ は $\mathbb{Z}$ であり，$f\colon U \to \mathrm{Spec}\ k$ を構造射とすると，$f_!\colon K_0(U, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \to K_0(\mathrm{Spec}\ k, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) = \mathbb{Z}$ は，$\mathcal{F}$ の類を Euler 数

$$\chi_c(U, \mathcal{F}) = \sum_{q=0}^{2\dim U} (-1)^q \dim H^q_c(U, \mathcal{F})$$

にうつす射である．したがって，この場合には Riemann-Roch の問題は，Euler 数の公式を与える問題である．構成可能層の定義と，次元に関する帰納法により，この問題は U がスムーズかつ $\mathcal{F}$ もスムーズな場合に帰着される．この場合には，次の公式が証明されている．

定理 1 ([4, Theorem 4.2.9])**.** X を U のコンパクト化とする．$\mathcal{F}$ の暴分岐の不変量として，Swan 類 $\mathrm{Sw}_U\mathcal{F} \in CH_0(X \setminus U)_{\mathbb{Q}}$ が定義され，

$$\chi_c(U, \mathcal{F}) = \mathrm{rank}\ \mathcal{F} \cdot \chi_c(U, \mathcal{F}) - \deg \mathrm{Sw}_U\mathcal{F} \tag{1}$$

がなりたつ．

ここで，$CH_0(X \setminus U)$ は，0 輪体の群の有理同値による商であり，添字 $_{\mathbb{Q}}$ は $\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ を表す．deg は 0 輪体類の次数を表す．Swan 類 $\mathrm{Sw}_U\mathcal{F}$ の定義は，その概要を後述する．公式 (1) は，U が曲線の場合には Grothendieck-Ogg-Shafarevich の公式とよばれ，SGA5 で証明されている．

この報告では，体 k が p 進体の場合を扱う．以下，体 K が p 進体であるとは，K が離散付値に関して完備な標数 0 の体であり，剰余体 F が標数 $p > 0$ の完全体であることとする．$V = \mathrm{Spec}\ K$ のときを考える．$G_K = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ を K の絶対 Galois 群とすると，$K_0(\mathrm{Spec}\ K, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ は，G_K の連続 $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ 表現の圏の Grothendieck 群であり，既約連続表現の同形類を基底とする自由 Abel 群である．G_K の ℓ 進表現の暴分岐の不変量である Swan 導手は，可換群の射 $\mathrm{Sw}_K\colon K_0(\mathrm{Spec}\ K, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathbb{Z}$ を定める．Swan 導手の定義も後述する．

K 上の有限型分離スキーム U に対し，構造射 $f\colon U \to K$ が定める射 $f_!\colon K_0(U, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \to K_0(\mathrm{Spec}\ K, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ と $\mathrm{Sw}_K\colon K_0(\mathrm{Spec}\ K, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \to \mathbb{Z}$ の合成は，U 上の ℓ 進層 $\mathcal{F}$ の類を，Swan 導手の交代和

$$\mathrm{Sw}_K H^*(U_{\bar{K}}, \mathcal{F}) = \sum_{q=0}^{2\dim U} (-1)^q \mathrm{Sw}_K H^*(U_{\bar{K}}, \mathcal{F})$$

にうつす射である．この場合には Riemann-Roch の問題は，Swan 導手の交代和を与える問題である．このときも，構成可能層の定義と，次元に関する帰納法により，U がスムーズかつ $\mathcal{F}$ もスムーズな場合に帰着される．定理 1 の類似として，次の導手公式が証明されている．

定理 2 ([5, Corollary 7.5.3])**.** X を U の $\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ 上のコンパクト化とする．$\mathcal{F}$ の暴分岐の不変量として，Swan 類 $\mathrm{Sw}_U\mathcal{F} \in F_0G(X_F)_{\mathbb{Q}}$ が定義され，

$$\mathrm{Sw}_K H^*_c(U, \mathcal{F}) = \mathrm{rank}\ \mathcal{F} \cdot \mathrm{Sw}_K H^*_c(U, \mathbb{Q}_\ell) + \deg \mathrm{Sw}_U\mathcal{F} \tag{2}$$

がなりたつ．

ここで，$F_0G(X_F)$ は，閉ファイバー X_F 上の連接層の Grothendieck 群の 0 次元部分であり，添字 $_{\mathbb{Q}}$ は $\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ を表す．deg は標準射 $F_0G(X_F) \to G(\mathrm{Spec}\ F) = \mathbb{Z}$ による像を表す．Swan 類 $\mathrm{Sw}_U\mathcal{F}$ の定義は後述する．

定理 2 は，次のように相対化される．K 上の有限型分離スキーム U に対し，$F_0G(\bar{U}_F)$ を，順像による逆極限 $\varprojlim_X F_0G(X_F)$ として定義する．ここで X は U の Spec $\mathcal{O}_K$ 上のコンパクト化を走る．ℓ 進層 $\mathcal{F}$ の類をその Swan 類にうつすことで射 $\mathrm{Sw}_U\colon K_0(U, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \to F_0G(\bar{U}_F)_{\mathbb{Q}}$ が定義される．詳細は後述する．これの変種 $\overline{\mathrm{Sw}}_U\colon K_0(U, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \to F_0G(\bar{U}_F)_{\mathbb{Q}}$ の定義も後述する．

定理 3 ([5, Theorem 7.5.1])**．** $f\colon U \to V$ を K 上の有限型分離スキームの射とする．f のコンパクト化による連接層の高次順像の交代和は群の射 $f_!\colon F_0G(\bar{U}_F) \to F_0G(\bar{V}_F)$ を定め，図式

$$
\begin{array}{ccc}
K_0(U, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{f_!} & K_0(V, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \\
{\scriptstyle \overline{\mathrm{Sw}}_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\mathrm{Sw}}_V} \\
F_0G(\bar{U}_F)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{f_!} & F_0G(\bar{V}_F)_{\mathbb{Q}}
\end{array}
\tag{3}
$$

は可換である．

定理は，U 上の構成可能 ℓ 進層 $\mathcal{F}$ に対し，Riemann-Roch 型の公式

$$\overline{\mathrm{Sw}}_V Rf_!\mathcal{F} = f_!\overline{\mathrm{Sw}}_U\mathcal{F} \tag{4}$$

がなりたつということである．$V = \mathrm{Spec}\ K$ の場合には，$\overline{\mathrm{Sw}}_V = \mathrm{Sw}_V$ であり，公式 (4) は，導手公式 (2) と，定数層に対する $\mathrm{Sw}_K H^*_c(U, \mathbb{Q}_\ell)$ についての公式をあわせたものになる．後者は，[3] で証明された次の公式の，開多様体への一般化である．

定理 4 ([3, Theorem 6.2.3])**．** X を $\mathcal{O}_K$ 上の固有平坦正則スキームとし，閉ファイバーの被約化 $X_{F,\mathrm{red}}$ は X の正規交叉因子であるとする．$n = \dim X_K + 1$ とし，$c_n{}^X_{X_F}(\Omega^1_{X/\mathcal{O}_K}) \in CH_0(X_F)$ を連接層 $\Omega^1_{X/\mathcal{O}_K}$ の局所化された Chern 類とすると，

$$\chi(X_{\bar{K}}) - \chi(X_{\bar{F}}) + \mathrm{Sw}_K H^*_c(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell) = -\deg(-1)^n c_n{}^X_{X_F}(\Omega^1_{X/\mathcal{O}_K}) \tag{5}$$

である．

公式 (5) は，Bloch が K 上の代数曲線に対して証明し，高次元について予想したものである [1]．

定理 3 の証明の主な要素には次の 2 つがある．

1. Swan 類の定義．

2. 公式 (4) の証明.

それぞれを次の節から解説する．ここではその概要を記す.

Swan 類の定義には，U がスムーズかつ $\mathcal{F}$ もスムーズな場合の定義と，それを一般化する部分の 2 つがある．スムーズな場合には，K 理論的局所化交点理論を用いる．スムーズな場合に切除公式を証明することで，定義が一般の場合に拡張される.

Riemann-Roch 公式の枠組み (3) は dévissage に適しているので，公式 (4) の証明は次元に関する帰納法により，U がスムーズかつ $\mathcal{F}$ もスムーズな場合に帰着される．さらに，f が有限エタール射の場合と，f がスムーズな相対曲線の場合に帰着される．前者の場合は，古典的な導手の誘導公式 [7, Chap. VI §2 Proposition 4 Corollaire] の直接の一般化である．曲線の場合には，de Jong による alteration の証明と同様に，安定曲線のモジュライのコンパクト性を使って準安定なコンパクト化を構成する．それに対し Lefschetz 跡公式の log 化を証明し，それから導く．ここで，log 化は，開多様体への一般化と，離散付値環上の退化を扱うため基礎スキームとして log 点を扱うことの 2 重の意味である.

§2.　Swan 類の定義

$U = \mathrm{Spec}\ K$ の場合には，$F_0G(\bar{U}_F) = G(\mathrm{Spec}\ F) = \mathbb{Z}$ であり，G_K の連続 $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ 表現 M が定める U 上の ℓ 進層 $\mathcal{F}$ に対し，Swan 類 $\mathrm{Sw}_U\mathcal{F}$ は Swan 導手 $\mathrm{Sw}_K M$ である．まず，Swan 導手の定義を復習する．話を簡単にするため，M が完全分岐有限次 Galois 拡大 L に対応する商 $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ の表現で定まる場合の定義を記す.

ord_L を L の正規離散付値，π_L を L の素元とし，$\sigma \in G, \sigma \neq 1$ に対し，$s_G(\sigma) = -\mathrm{ord}_L(\sigma(\pi_L)/\pi_L - 1)$ とおく．Swan 導手は,

$$\mathrm{Sw}_K M = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G, \sigma \neq 1} s_G(\sigma)(\mathrm{Tr}(\sigma : M) - \dim M) \tag{6}$$

で定義される.

Swan 導手が 0 以上の有理数であることは容易にわかるが，自然数であることは Hasse-Arf の定理とよばれている．$\mathrm{Sw}_K M = 0$ は，暴分岐群 P の M への作用が自明なことと同値であり，Swan 導手は M の暴分岐の激しさを表す不変量と考えられる.

この Swan 導手の定義を一般化する．U を K 上スムーズな有限型分離スキームとし，$\mathcal{F}$ を U 上のスムーズな $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ 層とする．上と同様に話を簡単にするため，U 上の有限エタール Galois 被覆 V で $\mathcal{F}$ を自明化するものがあり，$\mathcal{F}$ は Galois 群 $G = \mathrm{Gal}(V/U)$ の表現 M が定めるものであるとする．このとき，$\mathcal{F}$ の Swan 類は，$s_G(\sigma) \in F_0G(\bar{V}_F)_{\mathbb{Q}}$ を定義すれば，その順像 $f_! s_G(\sigma) \in F_0G(\bar{U}_F)_{\mathbb{Q}}$ を使って，(6) と同様の式

$$\mathrm{Sw}_U\mathcal{F} = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G, \sigma \neq 1} f_!(s_G(\sigma))(\mathrm{Tr}(\sigma : M) - \dim M) \tag{7}$$

で定義される．したがって，Swan 類の定義の要点は，$s_G(\sigma) \in F_0G(\bar{V}_F)_{\mathbb{Q}}$ の定義である．これには，局所化された K 理論的交点積を用いる．この定義はたいへんこみいっているので，はじめにもっと簡単なものを定義し，それをどのように修正していくか説明する．

幾何的な場合の類似を考える．F を標数 $p > 0$ の完全体とし，U を F 上のスムーズな有限型分離スキームとする．V を U の有限エタール Galois 被覆とし，G をその Galois 群とする．V のスムーズなコンパクト化 Y で，G の作用が延長されているものがあるとする．$\sigma \in G, \sigma \neq 1$ とする．このとき $s_G(\sigma)$ の最初の近似は，σ のグラフ Γ_σ と対角 Δ_Y の $Y \times_F Y$ での交点積

$$-(\Gamma_\sigma, \Delta_Y)_{Y \times_F Y} \in CH_0(Y \setminus V)$$

である．$V \to U$ がエタールと仮定しているので，共通部分 $\Delta_Y \cap \Gamma_\sigma$ は，$\sigma \neq 1$ なら $V \times V$ と交わらない．したがって，交点積 $(\Gamma_\sigma, \Delta_Y)_{Y \times_F Y}$ は $CH_0(Y \setminus V)$ の元として定義される [2].

これを次の段階を踏んで修正していく．

1. log 化する．
2. コンパクト化を alteration でおきかえる．
3. コンパクト化の極限をとる．
4. $S = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ 上考える．

各段階を簡単に解説する．詳細は後述する．定理 1 での Swan 類は，第 2 段階で定義される幾何的な場合の $s_G(\sigma)$ を使って定義される．

コンパクト化 Y 上で考えると，V だけでなく境界の情報もはいってくるので，これを切り落とすことが必要になる．これが 1. の log 化である．体 F 上の固有スムーズ多様体 X の Euler 数 $\chi(X_{\bar{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は微分形式の層 $\Omega^1_{X/F}$ の Chern 類として求められるが，単純正規交叉因子 D の補開部分スキーム $U = X \setminus D$ の Euler 数 $\chi_c(U_{\bar{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$ は D で対数極をもつ微分形式の層 $\Omega^1_{X/F}(\log D)$ の Chern 類として求められる．このように log 化することで，開多様体を扱えるようになる．実際の log 化の操作は，log ブローアップをすることである．

正標数や混標数では，特異点の解消が知られていないので，コンパクト化のかわりに，2. の alteration を考える必要がある．alteration からコンパクト化にもどってこなくてはならないが，それには順像を被覆の次数でわればよい．

代数曲線や整数環という 1 次元のものを扱う古典的な場合には，非特異な完備化は一意的である．しかし，高次元ではそのような特別のものはないので，3. ではコンパクト化をすべて考え，その逆系に関する逆極限を導入する．このほうがかえって柔軟性が大きく，スキームの射に対する関手性が得られる．

実際に扱うのは，正標数の体上のスキームではなく，p 進体の整数環上のスキームである．そこでは，整数環上のスキームとしてのファイバー積を考えても，対角射は正則埋め込みではなく，次元もあわないため，通常の交点積を考えることはできない．4. では，

代数的 0 輪体の群 CH_0 を連接層の K 群 F_0G でおきかえて，通常の交点積のかわりに，局所化された K 理論的交点積を導入する．これには，対角の自己交点積が閉ファイバーに台をもつ類として定義され，定数層に関する導手公式も定式化できるという利点もある．以下，各段階をもう少しくわしく解説する．

F を標数 $p > 0$ の完全体とし，U を F 上の有限型分離 d 次元スムーズ・スキーム，$f\colon V \to U$ 上の有限エタール Galois 被覆とし，G をその Galois 群とする．Y を F 上の有限型分離スムーズ・スキームで，V を単純正規交叉因子 $D = \bigcup_i D_i$ の補開部分スキームとして含むものとし，G の V への作用が Y への作用に延長されているとする．さらに $\sigma \in G$ と D の各既約成分 D_i に対し，$\sigma(D_i) = D_i$ か $\sigma(D_i) \cap D_i = \emptyset$ のどちらかがなりたつとする．

Y の自己 log 積を，次のように通常の積 $Y \times Y$ を加工することで定義する．単純正規交叉因子 D のすべての既約成分 D_i について $D_i \times D_i$ で $Y \times Y$ をブローアップし，さらに $(Y \times D) \cup (D \times Y)$ の固有変換を除いたものを $Y * Y$ で表し，Y の自己 log 積とよぶ．log 積 $Y * Y$ は F 上のスムーズ・スキームであり，$V \times V$ を開部分スキームとして含む．対角

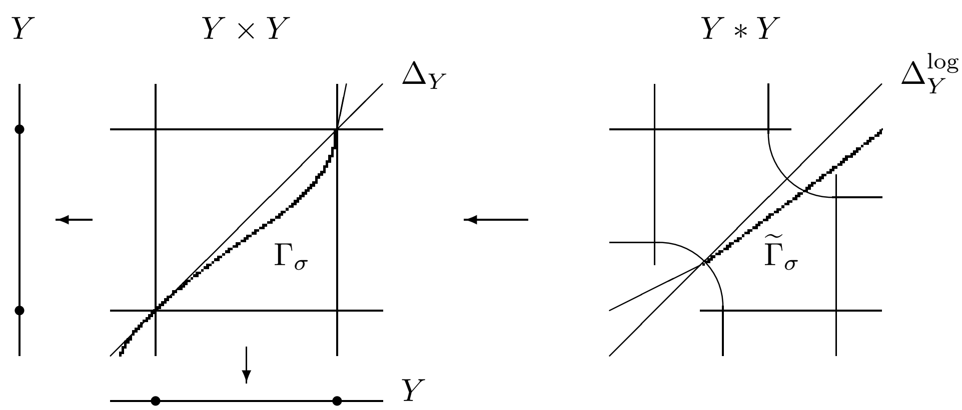

Figure 1. log 積

射 $\delta\colon Y \to Y \times Y$ は，log 対角射 $\delta^{\log}\colon Y \to Y * Y$ をひきおこす．$\sigma \in G$ についての上の仮定より，σ のグラフ $\gamma_\sigma\colon Y \to Y \times Y$ も，閉うめこみ $\gamma_\sigma^{\log}\colon Y \setminus \bigcup_{D_i \neq \sigma(D_i)} D_i \to Y * Y$ をひきおこす．$\delta^{\log}$ の像を $\Delta_Y^{\log}$，$\gamma_\sigma^{\log}$ の像を $\tilde{\Gamma}_\sigma$ で表す．被覆 $V \to U$ の D に沿った分岐が，馴分岐なら右図の右上のように共通部分 $\Delta_Y^{\log} \cap \tilde{\Gamma}_\sigma$ は空であり，暴分岐なら右下のように空でない．

例　$n \geq 1$ を p と素な自然数とし，$V = \mathbf{G}_m = \mathrm{Spec}\ F[t^{\pm 1}] \to U = \mathbf{G}_m$ を n 乗射，$Y = \mathbf{A}^1 = \mathrm{Spec}\ F[t]$ とする．このとき，$Y * Y = \mathrm{Spec}\ F[t, u^{\pm 1}]$ であり，標準写像 $Y * Y \to Y \times Y = \mathrm{Spec}\ F[s, t]$ は，$s \mapsto ut$ で定まる．$\Delta_Y^{\log} \subset Y * Y$ は $u = 1$ で定義される．

$\zeta \in F$ を 1 の原始 n 乗根とし，$\sigma \in G$ を $\sigma(t) = \zeta t$ で定める．このとき，σ のグラフ

$\Gamma_\sigma \subset Y \times Y$ は $s = \zeta t$ で定まり，その固有変換 $\tilde\Gamma_\sigma \subset Y * Y$ は $u = \zeta$ で定まる．仮定 $p \nmid n$ より，$\zeta \neq 1$ だから，$\Delta_Y^{\log} \cap \tilde\Gamma_\sigma = \emptyset$ である．

上の記号のもとで，さらに Y は F 上固有とする．このとき，交点積 $(\Delta_Y, \Gamma_\sigma)_{Y\times Y}$ の log 化は，交点積 $(\Delta_Y^{\log}, \tilde\Gamma_\sigma)_{Y*Y}$ として定義される．以上が第 1 段階である．

正標数では特異点解消の存在が証明されていないので，上のような Y の存在は仮定できない．そこで，Y としては V を開部分スキームとして含む F 上の任意の固有スキームを考える．このとき，de Jong の alteration により，F 上の固有スムーズ・スキーム Z と F 上の射 $\bar g\colon Z \to Y$ で，逆像 $W = \bar g^{-1}(V)$ が Z の単純正規交叉因子 D の補開部分スキームであり，$\bar g$ は全射で Y の密開部分スキーム上では有限被覆であるものが存在する．Z の D に関する log 積 $Z * Z$ を上のように定義する．$g\colon W \to V$ を $\bar g\colon Z \to Y$ の制限とする．

X を，U を開部分スキームとして含む F 上の固有スキームとし，U は X の Cartier 因子 B の補開部分スキームであるとする．合成射 $f \circ g\colon W \to U$ が $\bar f\colon Z \to X$ に延長され，さらに $\bar f^{-1}(U) = W$ であるとする．X の B に関する log 積 $X * X$ を上と同様に定義すると，対角射 $X \to X \times X$ は log 対角射 $X \to X * X$ をひきおこす．$\bar f$ がひきおこす射 $\bar f * \bar f\colon Z * Z \to X * X$ による，log 対角射の像の逆像 $(\bar f * \bar f)^{-1}(\Delta_X^{\log})$ を $Z *_X Z$ で表す．

$d = \dim Y$ とする．$g \times g\colon W \times W \to V \times V$ による Γ_σ の交点理論の意味でのひきもどしを $(g \times g)^!(\Gamma_\sigma) \in CH_d((W \times_U W) \setminus (W \times_V W))$ とする．$f\colon V \to U$ はエタールだから，$W \times_V W$ は $W \times_U W$ の開部分スキームである．$Z *_X Z$ は $W \times_U W$ を開部分スキームとして含むから，$W \times_V W$ も開部分スキームとして含む．$\bar\Gamma \in CH_d((Z *_X Z) \setminus (W \times_V W))$ を，$(g \times g)^!(\Gamma_\sigma)$ の延長とすると，交点積 $(\bar\Gamma, \Delta_Z^{\log})_{Z*_X Z} \in CH_0(Z \setminus W)$ は $\bar\Gamma$ のとり方によらない．さらに，順像 $\bar g_*(\bar\Gamma, \Delta_Z^{\log})_{Z*_X Z} \in CH_0(Y \setminus V)$ の被覆次数 $[W : V]$ による商は，Z のとり方にもよらない．そこで，log 交点積 $(\Gamma_\sigma, \Delta_Y^{\log}) \in CH_0(Y \setminus V)_{\mathbb{Q}}$ を，$\frac{1}{[W:V]} \bar g_*(\bar\Gamma, \Delta_Z^{\log})_{Z*_X Z}$ として定義する．これが第 2 段階である．定理 1 の Swan 類は，$s_G(\sigma) = -(\Gamma_\sigma, \Delta_Y^{\log})$ とおくことで，式 (7) で定義される．

Y と Y' を V を開部分スキームとして含む F 上の固有スキームとし，$h\colon Y' \to Y$ を，V 上では恒等射である F 上の射とすると，順像 $h_*\colon CH_0(Y' \setminus V)_{\mathbb{Q}} \to CH_0(Y \setminus V)_{\mathbb{Q}}$ は，log 交点積 $(\Gamma_\sigma, \Delta_{Y'}^{\log})$ を log 交点積 $(\Gamma_\sigma, \Delta_Y^{\log})$ にうつす．そこで，$CH_0(\bar V \setminus V)_{\mathbb{Q}}$ を逆極限 $\varprojlim_Y CH_0(Y \setminus V)_{\mathbb{Q}}$ として定義し，log 交点積 $(\Gamma_\sigma, \Delta_V^{\log}) \in CH_0(\bar V \setminus V)_{\mathbb{Q}}$ を，これらの逆系として定義する．これが第 3 段階である．

ここまでの段階はすべて正標数の完全体 F 上での幾何的な類似だった．最後の第 4 段階では，ここまでの幾何的な構成の $S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ 上での類似を定義する．第 2 段階の類似は形式的に同様に定義できるのでその部分は省略し，第 1 段階の類似と，第 3 段階での群の定義のみ解説する．

第 3 段階の類似からはじめる．Y を，V を開部分スキームとして含む S 上の固有スキームとする．代数的サイクル類の群 $CH_0(Y_F)$ の K 理論的類似を定義する．閉ファイバー Y_F 上の連接層の Grothendieck 群を $G(Y_F)$ とし，台の次元が 0 である連接層の類で生成される部分群を $F_0G(Y_F)$ とする．逆極限 $\varprojlim_Y F_0G(Y_F)_{\mathbb{Q}}$ を $F_0G(\bar U_F)_{\mathbb{Q}}$ で表す．

第1段階の類似を解説する．V が Y の単純正規交叉因子 D の補開部分スキームであるとする．このとき，log 積 $Y *_S Y$ が幾何的な場合と同様に定義される．X を S 上の固有スキームで，U を Cartier 因子の補開部分スキームとして含むものとし，$f\colon V \to U$ が S 上の射 $\bar f\colon Y \to X$ に延長されるとする．$Y *_X Y$ を $\Delta_X^{\log}$ の $Y *_S Y \to X *_S X$ による逆像として定義し，$\bar\Gamma \subset Y *_X Y$ を，$\bar\Gamma \cap (V \times_S V) = \Gamma_\sigma$ をみたす閉部分スキームとする．

$d = \dim Y$ とし，K 理論的交点積 $((\bar\Gamma, \Delta_Y^{\log}))_{Y *_S Y} \in F_0G(Y_F)$ を，

$$(-1)^d\Big([\mathcal{T}or_d^{\mathcal{O}_{Y *_S Y}}(\mathcal{O}_{\bar\Gamma}, \mathcal{O}_{\Delta_Y^{\log}})] - [\mathcal{T}or_{d+1}^{\mathcal{O}_{Y *_S Y}}(\mathcal{O}_{\bar\Gamma}, \mathcal{O}_{\Delta_Y^{\log}})]\Big)$$

として定義する．log 対角射 $Y \to Y *_S Y$ は余次元 $d-1$ の正則うめこみなので，$\mathcal{O}_Y$ 加群層 $\mathcal{T}or_q^{\mathcal{O}_{Y *_S Y}}(\mathcal{O}_{\bar\Gamma}, \mathcal{O}_{\Delta_Y^{\log}})$ は $q \geq d$ なら台が閉ファイバーに含まれる．よって，その類が $G(Y_F)$ の元として定義される．さらに，類 $[\mathcal{T}or_q^{\mathcal{O}_{Y *_S Y}}(\mathcal{O}_{\bar\Gamma}, \mathcal{O}_{\Delta_Y^{\log}})] \in G(Y_F)$ は，$q \geq d$ なら q の偶奇にしかよらないという周期性をもつことが示される．よって，$((\bar\Gamma, \Delta_Y^{\log}))_{Y *_S Y} \in G(Y_F)$ は，偶数次の項と奇数次の項の差として定義される．$((\bar\Gamma, \Delta_Y^{\log}))_{Y *_S Y} \in G(Y_F)$ は，$F_0G(Y_F)$ にはいり，$\bar\Gamma$ のとり方によらないことも示される．上の定義を，実際には第2段階のように alteration 上で行い，さらにコンパクト化に関する極限をとることで，$s_G(\sigma) = -((\Gamma_\sigma, \Delta_V))^{\log} \in F_0G(\bar V_F)_{\mathbb{Q}}$ を定義する．

これを式 (7) に代入し，U も $\mathcal{F}$ もスムーズな場合に Swan 類 $\mathrm{Sw}_U\mathcal{F}$ が定義される．K 理論的交点積の長所として，$\sigma = 1$ に対しても，$s_G(1) = -((\Delta_V, \Delta_V))^{\log} \in F_0G(\bar V_F)_{\mathbb{Q}}$ が定義される．そこで式 (7) を修正し，Swan 類 $\mathrm{Sw}_U\mathcal{F}$ の変種である全 Swan 類 $\overline{\mathrm{Sw}}_U\mathcal{F}$ を

$$\overline{\mathrm{Sw}}_U\mathcal{F} = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma \in G} f_!(s_G(\sigma))\mathrm{Tr}(\sigma : M) \tag{8}$$

で定義する．

Swan 類 $\mathrm{Sw}_U\mathcal{F}$ と全 Swan 類 $\overline{\mathrm{Sw}}_U\mathcal{F}$ については，次の切除公式がなりたつ．

定理 5 ([5, Theorem 6.2.2])**.**　U を K 上の有限型分離スムーズ・スキームとし，U_1 をそのスムーズ閉部分スキーム，$U_0 = U \setminus U_1$ とする．$i\colon U_1 \to U, j\colon U_0 \to U$ をうめこみとし，$i_!\colon F_0G(\bar U_{1,F}) \to F_0G(\bar U_F), j_!\colon F_0G(\bar U_{0,F}) \to F_0G(\bar U_F)$ をそれぞれがひきおこす射とする．U 上のスムーズ $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ 層 $\mathcal{F}$ に対し，

$$\mathrm{Sw}_U\mathcal{F} = j_!\mathrm{Sw}_{U_0}\mathcal{F}|_{U_0} + i_!\mathrm{Sw}_{U_1}\mathcal{F}|_{U_1}, \tag{9}$$

$$\overline{\mathrm{Sw}}_U\mathcal{F} = j_!\overline{\mathrm{Sw}}_{U_0}\mathcal{F}|_{U_0} + i_!\overline{\mathrm{Sw}}_{U_1}\mathcal{F}|_{U_1} \tag{10}$$

がなりたつ．

切除公式の帰結として，構成可能層に対し Swan 類と全 Swan 類が定義できる．

系 6 ([5, Proposition 7.4.2, Corollary 7.4.5])**.**　群の射

$$\mathrm{Sw}_U\colon K_0(U, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \to F_0G(\bar U_F), \quad \overline{\mathrm{Sw}}_U\colon K_0(U, \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \to F_0G(\bar U_F)$$

で，次の性質 (i), (ii) をみたすものがそれぞれただ 1 つずつ存在する．

(i) U がスムーズかつ $\mathcal{F}$ もスムーズなら，$\mathrm{Sw}_U[\mathcal{F}] = \mathrm{Sw}_U\mathcal{F}$ であり，$\overline{\mathrm{Sw}}_U[\mathcal{F}] = \overline{\mathrm{Sw}}_U\mathcal{F}$ である．

(ii) うめこみ $f\colon U \to V$ に対し，図式 (3) とそこで $\overline{\mathrm{Sw}}$ を Sw でおきかえたものは可換である．

以上が，Swan 類とその変種の定義である．

§ 3.　log Lefschetz 跡公式

Riemann-Roch 型の公式 (4) の証明の方針をごく簡単に紹介する．切除公式が使えるので，通常の議論により，U と V が K 上スムーズかつ $\mathcal{F}$ もスムーズで，次のどちらかの場合に帰着される．

(i) $f\colon U \to V$ が有限エタールのとき．

(ii) 固有スムーズ代数曲線 $\bar{f}\colon X \to V$ で，U を V 上有限エタールな因子 $D \subset X$ の補開部分スキームとして含むものがある．さらに，X の種数を g, D の次数を d とすると，$2g - 2 + d > 0$ である．

(i) の場合には，Swan 類の定義より，古典的な導手と同様な誘導公式がなりたつ．この場合，公式 (4) はこの誘導公式そのものである．

(ii) の場合を考える．スムーズ層 $R^1 f_! \mathbb{Q}_\ell$ の Swan 類の計算が要点である．条件 $2g - 2 + d > 0$ は，安定曲線のモジュライが Deligne-Mumford スタックであるための条件であり，このコンパクト化によって，alteration が得られることを使う．Swan 類の定義により，V の有限エタール Galois 被覆 $V' \to V$ で $R^1 f_! \mathbb{F}_\ell$ の V' へのひきもどしが定数層となるものをとる．G を Galois 群 $\mathrm{Gal}(V'/V)$ とする．

Swan 類の定義より，$\sigma \in G$ に対し，その基本群へのもちあげの $R^1 f_! \mathbb{Q}_\ell$ のストークへの作用の跡の計算が要点である．この計算は，特殊化との整合性を使って，V が K の有限次拡大 K' の Spec の場合に，次の log Lefschetz 公式を示すことに帰着される．記号を変えて，$K' = K$ とする．

定理 7 ([5, Theorem 1.4.6])**.**　L を K の有限次完全分岐 Galois 拡大とし，σ を暴分岐群 $P \subset \mathrm{Gal}(L/K)$ の元とする．$T = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_L$ とし，$t \in T$ を閉点とする．

X を T 上の準安定スキームとし，$D \subset X$ を T 上平坦な単純正規交叉因子，$U = X \setminus D$ を補開部分スキームとする．X', D', U' を σ による X, D, U の共役とする．D のすべての既約因子 D_i に対し $X \times_T X'$ を $D_i \times_T D'_i$ でブローアップしたものを $(X \times_T X')'$ とし，その生成ファイバーを $(X_L \times_L X'_L)'$ とする．$(D_L \times_L X'_L)', (X_L \times_L D'_L)' \subset (X_L \times_L X'_L)'$ を，$D_L \times_L X'_L, X_L \times_L D'_L \subset X_L \times_L X'_L$ の固有変換とする．

$d = \dim X_L$ とし，Γ' を $(X_L \times_L X'_L)'$ の d 次元閉部分スキームとする．$(\Delta_{X_t}, \Gamma'_t) \in CH_0(X_t)$ を，正則うめこみ $X_t \to (X \times_T X')'_t$ による Γ' の閉ファイバー Γ'_t の交点理論

の意味でのひきもどしとし，$\deg(\Delta_{X_t}, \Gamma'_t)$ をその次数とする．

$$\Gamma' \cap (D_L \times_L X'_L)' \subset \Gamma' \cap (X_L \times_L D'_L)'$$

であるとし，$\Gamma = \Gamma' \cap (U_L \times_L U'_L)$ とおく．

このとき，第 2 射影 $\mathrm{pr}_2 \colon \Gamma \to U'_L$ は固有であり，$\Gamma^* = \mathrm{pr}_{1!} \circ \mathrm{pr}_2^* \colon H^*_c(U'_{\bar{L}}, \mathbb{Q}_\ell) \to H^*_c(U_{\bar{L}}, \mathbb{Q}_\ell)$ が定義される．さらに σ の作用 $\sigma^* \colon H^*_c(U_{\bar{L}}, \mathbb{Q}_\ell) \to H^*_c(U'_{\bar{L}}, \mathbb{Q}_\ell)$ との合成について，跡公式

$$\mathrm{Tr}(\Gamma^* \circ \sigma^* : H^*_c(U_{\bar{L}}, \mathbb{Q}_\ell)) = \deg(\Delta_{X_t}, \Gamma'_t) \tag{11}$$

がなりたつ．

log Lefschetz 跡公式 (11) は，通常の Lefschetz 跡公式のように，Poincaré 双対性と Künneth 公式が log étale cohomology についてなりたつことから証明される．(11) では，開多様体 U を考えていることと，証明に log 点 t 上の log スキームの log étale cohomology を使うという 2 重の意味で，log 化がなされている．$U = X$ の場合には [3, Theorem 6.5.1] であり，正標数の完全体上の幾何的な場合には [4, Theorem 2.3.4] である．

以上が，Riemann-Roch 型の公式 (4) の定式化とその証明の概要である．詳細は，http://arxiv.org/abs/1007.0310 にある．

References

[1] S. Bloch, *Cycles on arithmetic schemes and Euler characteristics of curves*, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985, 421–450, Proc. Symp. Pure Math. 46, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[2] W. Fulton, Intersection theory, 2nd ed. Ergeb. der Math. und ihrer Grenz. 3. Folge. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[3] K. Kato, T. Saito, *On the conductor formula of Bloch*, Publ. Math., IHES **100**, (2004), 5-151.

[4] ——, *Ramification theory for varieties over a perfect field,* Ann. of Math., **168** (2008), 33-96.

[5] ——, *Ramification theory for varieties over a local field,* arXiv:1007.0310

[6] R. D. MacPherson, *Chern classes for singular algebraic varieties*, Ann. of Math. (2) **100** (1974), 423-432.

[7] J.-P. Serre, Corps Locaux, Hermann, Paris.