2008年度第4学期 **集合と位相 中間試験問題**

11月27日 (木) 9:30-12:00 (150分) 斎藤 毅

・問題用紙　1枚、解答用紙　1枚（4ページ)、計算用紙1枚

・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません。

注意：答だけを書くのではなく，それが確かに答になっている理由もくわしく書いて下さい。答があっていても，説明が不十分だと，減点されます。また,「明らか」という言葉は使わずに，説明して下さい．なるべく読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください.

問題1　（解答用紙の1ページめに記入してください）$a < b$ を実数とする.

(1)　$\mathbb{R}$ の部分集合の等式 $[a, b] = \bigcap_{s<a,\, b<t} (s, t)$ を示せ.

(2)　記号 $\bigcap_{s<a,\, b<t} (s, t)$ は，集合族の共通部分を表している．この集合族について，次の問いに答えよ.（この小問は，答だけでよい.）

(a)　添字の集合 I を，$\mathbb{R}^2$ の部分集合として表せ.
（条件を書くにはコンマを使わず,「または」か「かつ」で明記してください.）

(b)　この集合族が定める巾(べき)集合への写像 $I \to P(\mathbb{R})$ による，I の元の値を表せ.
（対と開区間の区別が明確になるように解答してください.）

問題2　$\mathbb{R}^3$ の元を列ベクトルで表わし，写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(s,t) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi s & -\sin 2\pi s & 0 \\ \sin 2\pi s & \cos 2\pi s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\pi t + 2 \\ 0 \\ \sin 2\pi t \end{pmatrix}$$

で定める．$x, y \in \mathbb{R}^2$ に対し $x - y \in \mathbb{Z}^2$ で定まる $\mathbb{R}^2$ の同値関係 R による商集合を，$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ で表し，$q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ を商写像とする.

(1)（解答用紙の2ページめに記入してください）　写像 $g\colon \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^3$ で，$f = g \circ q$ をみたすものが，ただ1つ存在することを示せ.

g は単射であることも示せ.

(2)（解答用紙の3ページめに記入してください）　$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ を整数とし，写像 $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を，$h(s,t) = (as + bt,\ cs + dt)$ で定める．写像 $\bar{h}\colon \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ で，$\bar{h} \circ q = q \circ h$ をみたすものが，ただ1つ存在することを示せ.

$ad - bc = 1$ ならば，$\bar{h}$ は可逆であることも示せ.

問題3　（解答用紙の4ページめに記入してください）

(1)　X と Y を位相空間とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．f が連続写像であるということの定義を，必ず次のことばを使って書け.（この小問も，答だけでよい.）

必ず使うことば：任意の，開集合.

(2)　$\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ を，ふつうの位相により位相空間と考える．$[0, 2\pi) = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t < 2\pi\}$ と $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ を，それぞれ $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ の部分位相空間とする.

可逆写像 $f\colon [0, 2\pi) \to S^1$ を $f(t) = (\cos t, \sin t)$ で定め，$g\colon S^1 \to [0, 2\pi)$ を写像 f の逆写像とする．(1) で与えた定義にしたがって，g は連続写像でないことを示せ.

略解　**1** (1) $s<a$ かつ $b<t$ ならば，$[a,b]\subset(s,t)$ である．よって，$[a,b]\subset\bigcap_{s<a,\,b<t}(s,t)$ である．

$[a,b]\supset\bigcap_{s<a,\,b<t}(s,t)$ を示す．実数 x に対し，$x\notin[a,b]$ なら $x\notin\bigcap_{s<a,\,b<t}(s,t)$ を示せばよい．$x<a$ とすると，$x<a$ かつ $b<t+1$ であり $x\notin(x,t+1)$ である．よって，$x\notin\bigcap_{s<a,\,b<t}(s,t)$ である．同様に $x>b$ のときも $x\notin\bigcap_{s<a,\,b<t}(s,t)$ である．よって，$[a,b]\supset\bigcap_{s<a,\,b<t}(s,t)$ である．

(2) (a) $I=\{(s,t)\in\mathbb{R}^2\mid s<a$ かつ $b<t\}$.

(b) 対 $(s,t)\in I$ の値は，開区間 $(s,t)\in P(\mathbb{R})$.

[解説] 集合の等式 $A=B$ を示すには，$A\subset B$ と $A\supset B$ を示せばよい．

$A\subset\bigcap_{i\in I}B_i$ は，任意の $i\in I$ に対し $A\subset B_i$ であることと同値である．$A\supset\bigcap_{i\in I}B_i$ は，X を全体集合とすると，補集合を考えればド・モルガンの公式より，$X\setminus A\subset\bigcup_{i\in I}(X\setminus B_i)$ と同値である．したがって，$x\notin A$ ならば $x\notin B_i$ をみたす $i\in I$ が存在することを示せばよい．この問題の場合，存在を示すには，構成するのが直接的でよい．

実数の連続性よりと書いてある答案がいくつかあったが，この問題の等式は実数の代わりに有理数で考えても同じようになりたつので，実数の連続性は関係ないことがわかる．

2 (1) $x-y\in\mathbb{Z}^2$ なら $f(x)=f(y)$ である．よって R は f が定める同値関係 R_f より細かく，$f=g\circ q$ をみたす写像 $g\colon\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\to\mathbb{R}^3$ がただ 1 つ存在する．逆に $f(x)=f(y)$ なら $x-y\in\mathbb{Z}^2$ である．よって，R_f は R より細かいから，g は単射である．

(1) の別解．f が定める同値関係 R_f は R と同値である．したがって，f の標準分解により，可逆写像 $\bar f\colon\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\to f(\mathbb{R}^2)$ が定まる．$g\colon\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\to\mathbb{R}^3$ を $\bar f$ と包含写像 $i\colon f(\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}^3$ の合成 $i\circ\bar f$ とすると，g は単射であり，$f=g\circ q$ である．q は全射だから，$f=g\circ q$ をみたす g は一意的である．

(2) $x-y\in\mathbb{Z}^2$ ならば $h(x)-h(y)=h(x-y)\in\mathbb{Z}^2$ である．よって，R は写像 $q\circ h$ が定める同値関係より細かく，$\bar h\circ q=q\circ h$ をみたす写像 $\bar h$ がただ 1 つ存在する．

$ad-bc=1$ とする．写像 $k\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を，$k(s,t)=(ds-bt,\ -cs+at)$ で定める．写像 $\bar k\colon\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\to\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ で，$\bar k\circ q=q\circ k$ をみたすものが，ただ 1 つ存在する．$h\circ k=k\circ h=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ についてもそうだから，$\bar h\circ\bar k=\bar k\circ\bar h=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2}$ である．

[解説] 商集合からの写像がひきおこされる条件やその一意性，写像の標準分解の構成があやしい人は，よく復習しておいてください。講義でも説明したとおり，写像が可逆であることを示すには，逆写像を構成するのがわかりやすいことが多いです．

f の像は，f の定義の式のベクトルと行列より，xz 平面内の点 $(2,0,0)$ を中心とする半径 1 の円を，z 軸を軸として回転して得られる図形になる．このことを理解できれば，f が定める同値関係が R と同値であることを示すことは難しくない．

写像 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\colon t\mapsto(\cos t,\sin t)$ の標準分解は可逆写像 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\to S^1$ を定めることを，講義で解説した．これと同様に写像 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\colon t\mapsto(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)$ の標準分解は可逆写像 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to S^1$ を定め，さらにその積はトーラス $T^2=S^1\times S^1$ への可逆写像 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\to T^2$ を定める．これにより，$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ とトーラス T^2 を同一視すれば，問題の写像 g は $((x,y),(u,v))\mapsto(x(u+2),y(u+2),v)$ で定まる単射 $T^2\to\mathbb{R}^3$ である．

3 (1) Y の任意の開集合 V に対し，逆像 $f^{-1}(V)$ は X の開集合である．

(2) $[0,2\pi)$ の開集合 $V=(-\pi,\pi)\cap[0,2\pi)=[0,\pi)$ の逆像 $g^{-1}(V)=f(V)=\{(x,y)\in S^1\mid y\geq 0,x\neq -1\}$ が S^1 の開集合でないことを示せばよい．$a=(1,0)\in g^{-1}(V)$ だから，$g^{-1}(V)$ が S^1 の開集合だったとすると，$U_r(a)\cap S^1\subset g^{-1}(V)$ をみたす実数 $r>0$ が存在する．

$0 < t \leq 2$ をみたす実数 t に対し，$b = (1 - \frac{t^2}{2}, -\frac{\sqrt{4t^2-t^4}}{2}) \in S^1 \setminus g^{-1}(V)$ とおくと，$d(a, b) = t$ である．$t = \frac{r}{2}$ とすれば，$b \in U_r(a) \cap S^1$ だが $b \notin g^{-1}(V)$ だから，$U_r(a) \cap S^1 \subset g^{-1}(V)$ をみたす $r > 0$ は存在しない．

（別解：$0 < r \leq \pi$ に対し，$c = (\cos r, -\sin r) \in S^1 \setminus g^{-1}(V)$ とおくと，$d(a, c) = 2\sin\frac{r}{2} < r$ であり，$c \in U_r(a) \cap S^1$ である．このことから，条件をみたす $r > 0$ が存在しないことを導いてもよい.）

[解説] 連続写像や，部分空間の開集合の定義があやしい人は，よく復習しておいてください。

「任意の V に対し，P ならば Q がなりたつ」の否定は,「P をみたし Q をみたさない V が存在する」となる．連続写像や，部分空間の開集合の定義が正しく適用できれば，示すべきことは，点 $(1, 0)$ を中心とする任意の半径 r の円の内部と，点 $(0, 0)$ を中心とする半径 1 の円周 S^1 の x 軸より下の部分の，共通部分が空でないこととなる．このことを示すには，点 $(1, 0)$ からの距離が半径 r の半分になる S^1 の点に着目してもよいし，別解のように，S^1 の偏角が $0 < r < \pi$ の点と点 $(1, 0)$ の距離 $2\sin\frac{r}{2}$ が r より小さいことに着目してもよい.

(2) の解答は,「(1) で与えた定義にしたがって」という条件がなければ，$f\colon [0, 2\pi) \to S^1$ を延長する連続写像 $\tilde{f}\colon [0, 2\pi] \to S^1$ を $\tilde{f}(t) = (\cos t, \sin t)$ で定め，g が連続だとすると，合成 $g \circ \tilde{f}\colon [0, 2\pi] \to [0, 2\pi)$ が連続となることから矛盾を導くのが，わかりやすい.