No.

Date 6・14

k：完全体　$\mathrm{ch}=p>0$

X：smooth $\supset D$　S.N.C.D

$\cup$　　　$D = \bigcup_i D_i$

$U = X \setminus D$

$R = \sum r_i D_i \quad (r_i \in \mathbb{N})$

$V \to U$　G-torsor　G 有限群

Gが非可換ならGの作用なし

$$\begin{tikzcd} Z_0 \subset Z \arrow[d] & \hookleftarrow & W = (V \times V)/\Delta G \arrow[d] \\ (X \times X)^{(R)} & \hookleftarrow & U \times U \end{tikzcd}$$

étale になる. 最大 open

groupoid の射.

V/U の D にそっての log 分岐は $R+$ 以下

$\Updownarrow$

Z_0 に unit section あり

分岐群との関係

整閉包
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d] & V \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\ X \arrow[r, phantom, "\square"] & U \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

D：既約

Y：smooth

$E = Y \setminus V$ smooth

$\xi \in D$ gen. pt

$\eta \in E$ 〃

$K = \mathrm{Frac}\, \hat{\mathcal{O}}_{X,\xi}$

$L = \mathrm{Frac}\, \hat{\mathcal{O}}_{Y,\eta}$

$R = rD \qquad G^{r+} = \{1\}$

L は K の Galois 拡大

$\mathrm{Gal}(L/K) = G$

No.

Date

Kの十分大きい
Lを含む有限次拡大.

$$\begin{tikzcd}
2^\circ & * \arrow[l] & & Q_F^{(r)} \arrow[ll] \arrow[d] \\
(X\times X)^{(R)} \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\square"] & E_D = \mathbb{V}(\Omega^1_X((\log D)(R))) \arrow[l] \arrow[u, "\text{ét}"'] \arrow[d, "\text{sm.}"] & & E_{D,F} = P_F^{(r)} = \Theta_F^{(r)} \arrow[ll] \arrow[d] \\
X \arrow[r, phantom, "\square"] & D \arrow[l] & & \operatorname{Spec} F \arrow[ll] \arrow[u, bend right, "\text{0-section}"']
\end{tikzcd}$$

← D上のgroup scheme の étale 射

G-torsor

0-section

F = k(ξ) Dの関数体
Kの剰余体

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\square"] & V\times V \arrow[l] \arrow[d] \\
U\times U \arrow[d, "pr_2"] & U\times V \arrow[l] \arrow[d, "pr_2"] \\
U & V \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

← Gが第1因子に作用

$$\begin{tikzcd}
2^\circ & * \arrow[l] \\
(X\times X)^{(R)} \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\square"] & (X\times S)^{(R)} = P_S^{(R)} \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d] \\
X \arrow[u, bend left] \arrow[uu, bend left=60] & S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

unit section
‖
もともとdiagonal.

$$\begin{tikzcd}
X & S \arrow[l] & S' = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'} \arrow[dl] \\
Y \arrow[u] & T = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_L \arrow[l] \arrow[u] & \\
\cup & \cup & \\
V & \operatorname{Spec} L \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

ここまで
ひき戻すと
Gの作用が
ある.

No.

Date . .

$G^r_{(1.8)} = G^r/G^{r+}$ は $\mathrm{Aut}((Q_F^{(r)})_0)$

$P_F^{(r)} \longrightarrow$ unit section を含む連結成分

$\|$

$(Q_F^0)_0$ は F 上の smooth 群 scheme

$0 \to G^r \to (Q_F^0)_0 \xrightarrow[\text{finite étale}]{} E_F \to 0$ 完全系列

$Q_F^{(r)}$

$\downarrow$ の原点のファイバー $= G$

$P_F^{(r)}$

この完全系列の系として G^r/G^{r+} は abel で p 倍すると ①

0 が導ける。

補題 F char $p > 0$ の代数閉体

V 有限次元 F-線形空間を F 上の

smooth 代数群 とみたもの. $\mathrm{Spec}\, S^\bullet V^*$

G: 有限群

$1 \to G \to E \to V \to 1$ F 上の群スキームの完全列

($G \to E \to V$ が群スキームの射かつ $E \to V$ は G torsor)

このとき

1) E は可換で $pE = 0$

($\Rightarrow$ G も可換で $pG = 0$)

No.

Date

2) $\mathrm{Hom}_{\text{線形}}(V, F) \otimes_{\mathbb{F}_p} G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}(V, G)$

(V の G による拡大の同形類集合)

$$\begin{array}{ccc} \Psi & & \Psi \\ \sum f_i \otimes g_i & \longmapsto & [E] \end{array}$$

(g_i): G の基底

とすると、

E は f_i による A-S のひき戻しを g_i 倍してたしあわせたものと同形

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathbb{F}_p & \to & E_i & \to & V & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & \square & \downarrow f_i & & \\ 0 & \to & \mathbb{F}_p & \to & \mathbb{G}_a & \to & \mathbb{G}_a & \to & 0 \\ & & & & t & \mapsto & t^p - t & & \end{array}$$

Artin-Schreier の ext'n

3) $[E]$: $\mathrm{Hom}_{\text{アーベル群}}(G, \mathbb{F}_p) \to \mathrm{Hom}_{F\text{-linear}}(V, F)$ は単射.

$$\begin{array}{ccc} \Psi & & \Psi \\ h & \longmapsto & h_*(E) \end{array}$$

V の $\mathbb{F}_p$ による ext'n

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & G & \to & E & \to & V & \to & 0 \\ & & h\downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & \mathbb{F}_p & \to & h_*E & \to & V & \to & 0 \end{array}$$

$\mathrm{Hom}(V, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}(V, \mathbb{F}_p)$

$$\begin{array}{ccc} \Psi & & \Psi \\ & \longleftarrow & h_*E \end{array}$$

3) より単射

$\mathrm{rsw} : \mathrm{Hom}(G^r/G^{r+}, \mathbb{F}_p) \to \Omega^1_X(\log D)(R)_\xi \otimes_{\mathcal{O}_{X,\xi}} \bar{F}$, $F = k(\xi)$

$\| $

$\mathrm{Hom}_F(m_K^r/m_K^{r+1} \otimes \bar{F}, \Omega_X(\log D) \otimes \bar{F})$

例 $t^p - t = \dfrac{1}{T^n}$ $\mathrm{rsw} = \text{“} d\dfrac{1}{T^n} \text{”} = (T^n \mapsto) \, d \log \dfrac{1}{T^n}$)

$p \nmid n$

$\| $

$-n \, d \log T$

補題の証明

1) 連結

$$\begin{tikzcd} & & V\times V \arrow[dr, "{[\,,\,]=0}"] & \\ {[\,,\,]} : E\times E \arrow[r] \arrow[urr, bend left] \arrow[dr] \arrow[d] & E \arrow[rr] & & V \\ \{1\} \arrow[r, phantom, "\subset"] & G \arrow[u] & & \end{tikzcd}$$

$[\,,\,]=1$ 可換

p乗 :

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "0"] & \\ E \arrow[r] & E \arrow[u] \arrow[r] & V \end{tikzcd}$$

∴ p乗 $=1$

2) $V=\mathbb{G}_a$, $G=\mathbb{F}_p$ としてよい.

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathrm{Ext}(\mathbb{G}_a, \mathbb{F}_p) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ c & \longmapsto & [E_c] \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{F}_p \arrow[r] \arrow[d, equal] & E_c \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{G}_a \arrow[r] \arrow[d, "c倍"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{F}_p \arrow[r] & \mathbb{G}_a \arrow[r] & \mathbb{G}_a \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

が同形を表す. 単射

$[E_1]\neq 0$ $c\neq 0$ c倍は同形なので $[E_c]\neq 0$

全射 $[E]\in \mathrm{Ext}(\mathbb{G}_a, \mathbb{F}_p)$ Eの種数が0 $\Rightarrow E\simeq \mathbb{G}_a$

文献 1. $\mathrm{Ext}(\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_a)$ Demazure–Gabriel

2. Borel Linear Alg. Group

Eの射影化のJacobian $\to g=0$

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[r, mapsto] & c \ (c\neq 0) & & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{F}_p \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{G}_a \arrow[r] \arrow[d, "\wr\ c\text{倍}"] & \mathbb{G}_a \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{F}_p \arrow[r] & \mathbb{G}_a \arrow[r] & \mathbb{G}_a \arrow[r] \arrow[u, "ac^p"'] & 0 \\
 & \mapsto 1 & t \mapsto t^p - t & &
\end{tikzcd}
$$

étale isogeny

$t \mapsto at^p + bt$ deg $= p$ $\Rightarrow$ $a \neq 0$

$b \neq 0$ $\Leftarrow$ étale

同型条件 $ac^p + bc = 0$

3.12 2の系なので略 //

特性類

$U \overset{j}{\subset} X/k$ proper, smooth, $\mathrm{ch}\, k = p > 0$

open imm.

$\mathcal{F}$: U上のlocally constant sheaf of $\mathbb{Z}/\ell^n$-module
$\ell \neq p$

$\chi_c(U_{\bar{k}}, \mathcal{F})$ Euler類

$$\| $$

$$\underbrace{\mathrm{Tr}\, C(j, \mathcal{F})}_{\text{charn class}} \in H^{2d}(X, \mathbb{Z}/\ell^n(d)) \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathbb{Z}/\ell^n$$

← 分岐を使って計算したい

Lefschetz trace formula (SGA5)

No.
Date

X k上 of finite type

X_{et} obj は X 上の étale scheme
mor は X 上の morphism (étale)

$\xrightarrow{\text{ét}}$ $\nearrow$ ét $\Uparrow$ $\swarrow$ ét

X_{et} 上の sheaf : 反変関手で $X_{et} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{Ens}$ (集合の圏)
で
はりあわせの条件
$\{U_i \to U\}_i$ で $\bigcup_i \mathrm{Im}(U_i) = U$
に対し
$\mathcal{F}(U) \to \mathrm{Ker}(\prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \times_U U_j))$,
は bij.

Y X上の scheme なら, $U \mapsto Y(U)$ は sheaf

X_{et} 上の層が smooth (= l.c.c. locally constant constructible)
とは, X 上の finite étale scheme で表現されること.

$(\text{Finite étale}/X) \xrightarrow{\text{同値}} (\text{l.c.c}/X_{et})$
$\searrow$
($\pi_1(X, \bar{x})$ が連続に作用する有限集合)

X_{et} 上の Abel 群の層　単射的対象を十分もつ
Abel 圏 (Tohoku,

No.

Date

$(Ab/X_{et}) \longrightarrow Ab$ (Abel群の圏)

$\mathcal{F} \longmapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ の導来関手 $H^*(X, \mathcal{F})$ が定義される.

$f : X \to Y / k$ $\quad f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ で
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad V \times_Y X$

X_{et} 上の層 $\mathcal{F}$ の順像 $f_*\mathcal{F}$ が定義され,

f_* の左随伴関手 f^* は exact.

$U \overset{j}{\hookrightarrow} X \overset{i}{\hookleftarrow} Y \qquad j_!\mathcal{F} = \operatorname{Ker}(j_*\mathcal{F} \to i_* i^* j_* \mathcal{F})$

adjunction $\qquad j_!$ は exact.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\text{open imm.}", "j"'] \arrow[dr] & \bar{X} \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

$X \to Y$ sep, $\bar{f}$ proper $\quad \therefore R^q f_! = R^q \bar{f}_* \circ j_!$

X_{et} 上の層 $\mathcal{F}$ が constructible とは

X の局所閉部分スキームによる分割 $X = \coprod_i X_i$ (underlying set の分割)

$j_i : X_i \to X$ (locally closed imm)

で $\mathcal{F}|_{X_i} = j_i^*\mathcal{F}$ が l.c.c. になるものが存在する.

No.

Date

$\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ $\ell \neq \mathrm{char}\, k$

$D_{ctf}(X, \Lambda)$ derived category

constructible tordimension finite

obj X 上の Λ 加群の層の複体 $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^\cdot, d^\cdot)$ で

整数 $a \le b$ ですべての有限 Λ-module N に

対し, $\mathcal{H}^i(\mathcal{F} \otimes^L_\Lambda N)$ が $i \notin [a,b]$ なら 0,

すべての i に対して constructible

i 次のコホモロジー層

N を自由 Λ 加群で分解して $\otimes$

mor complex の射 modulo htp

quasi-isom. で局所化.

<u>6 operation</u> $f : X \to Y / k$ sep. of. fin. type

$(R)f_* \; f_! : D_{ctf}(X, \Lambda) \to D_{ctf}(Y, \Lambda)$

$f^* \; (R)f^! : D_{ctf}(Y, \Lambda) \to D_{ctf}(X, \Lambda)$

Rf_* の左 adjoint

$f_!$ の右 adjoint

$\otimes^L \; R\mathcal{H}om : D_{ctf}(X, \Lambda) \times D_{ctf}(X, \Lambda) \to D_{ctf}(X, \Lambda$

No.

Date

$K_X = Rf^! \Lambda \qquad f : X \to Y / k$

f : smooth dim $d \Rightarrow Rf^! \Lambda = \Lambda(d)[2d]$

Tate twist shift

$D_X = R\mathcal{H}om(-, K_X) : D_{ctf}(X, \Lambda) \to D_{ctf}(X, \Lambda)$