No.

Date ・5.31

Galois 被覆の分岐を blow-up で消す.

$V \to U$ G-捩子 finite étale

$U = X \setminus D$ X/k smooth

$R = \sum r_i D_i$ $D = \bigcup D_i \subset X$ SNCD

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[d] & \supset W = V \times V/\Delta G & V/G \arrow[l] \arrow[d, "\wr"] \\
X \arrow[ur, bend left] \arrow[r] & (X \times X)^{(R)} & \supset U \times U & U \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

前回 例2

$V \to U = \mathbb{G}_m \subset X = \mathbb{A}^1 \supset D = (T)$

$\mathbb{G}_m = \operatorname{Spec} k[T^{\pm 1}]$

$t^p - t = \frac{1}{T^n}$ $(p \nmid n)$ $\leftarrow R = nD$

レポート $V \to U = \mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^1 \subset X = \mathbb{A}^2 \supset D = (T_1)$

$\mathbb{A}^2 = \operatorname{Spec} k[T_1, T_2]$

$t^p - t = \frac{T_2^n}{T_1^n}$ $p | n$

のとき $Z \to (X \times_k X)^{(R)}$ が étale.

$$\begin{tikzcd} 2_R \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & 2 \arrow[d] \\ E_R \arrow[r] & (X * X)^{(R)} \end{tikzcd}$$

$E_R = \mathbb{V}(\Omega^1_X(\log D)(R)) \times_X R$

$t^p - t = \frac{dT_2}{T_1^n} \in \Gamma(E_R, \Omega^1_X(\log D)(R))$

E_R上の線形形式

Artin-Schreier 拡大

$K = \mathrm{Frac}(\hat{O}_{X,\xi})$ Kのp次巡回拡大.

$\mathrm{Hom}(G_K, \mathbb{F}_p) = H^1(K, \mathbb{F}_p) \simeq K/\wp(K)$

$\wp: K \to K; a \mapsto a^p - a$

L/K p次巡回 $G = \mathrm{Gal}(L/K) \simeq \mathbb{F}_p \leftrightarrow \bar{a} \in K/\wp(K$

$G_K \nearrow G$

$G^r_{\log} \neq 1$ $G^{r+}_{\log} = 1$ となるrは整数で nD

$a \in F^n$となる最小のnと等しい.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\, O_L \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d] & V \arrow[l, phantom, "\supset"] \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\, O_K \arrow[r] & X & U = X \setminus D \arrow[l, phantom, "\supset"] \end{tikzcd}$$

$K/\wp(K) \supset F^n$

m_K^{-n}の像

étale近傍でおきかえ

$R = nD$ $E_\xi = \mathbb{V}(\Omega^1_X(\log D)(R) \otimes F$

$\xi = \mathrm{Spec}\, F$ F上のvector sp

$$\begin{tikzcd} & 2_R \arrow[r] \arrow[d] & 2 \arrow[d] \\ E_\xi \arrow[r] \arrow[d] & E_R \arrow[r] \arrow[d] & (X * X)^{(R)} \\ \mathrm{Spec}\, F \arrow[r] & \xi \arrow[r] & R \end{tikzcd}$$

$da \in \Omega^1_X(\log D)(R) \otimes F$ は E_ξ の線形形式

$\parallel$

$a\, d\log a$

$Z_\xi \to E_\xi$ は $t^p - t = da$ で定まる A.S. 被覆

レポート

$a = \dfrac{T_2}{T_1^n}$ $\quad da = \dfrac{dT_2}{T_1^n}$

一般の場合

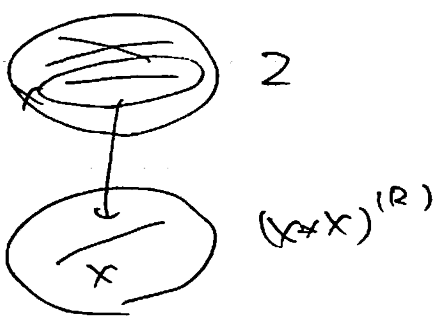
定義 $V \to U$ を k 上の smooth scheme の finite étale G-torsor $X \supset U = X \setminus D$ $\quad D$: simple normal crossing

$R = \sum r_i D_i$ とする.

$V \to U$ の D にそっての (log) 分岐が $R+$ 以下であるとは

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & & \downarrow \\ X & \to & (X \times X)^{(R)} \end{array}$$

この射が $X \hookrightarrow Z$ の近傍で étale であることをいう.



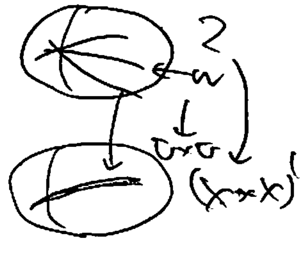
$\pi^{-1}(X) = X \amalg$ 他

$\uparrow$ disjoint

位相空間として

G Abel のとき

$$\begin{tikzcd} W = V\times V/\Delta G \arrow[d, "\in G\text{-torsor}"] & & W\times_{V\times V} U \arrow[d, "\text{split.}"'] \\ U\times U & & U \arrow[ll] \arrow[ull, bend right, "\exists"'] \end{tikzcd}$$



D_i Dの既約成分 ξ_i 生成点 $K_i = \mathrm{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_{X_i,\xi_i})$

L_i : $\Gamma(V\times_U \mathrm{Spec}\, K_i, \mathcal{O})$ の成分

$G_i = \mathrm{Gal}(L_i/K_i)$

$V \to U$ の分岐が R+ より下 ⇒ 各 i で $G_i^{r+} = \{1\}$

このsectionを含む連結成分

$$\begin{tikzcd} (Z_{\xi_i})_0 \subset Z_{\xi_i} \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] & \supset W \arrow[d, "\text{étale}"] \\ E_i \arrow[r] \arrow[d] & (X\times X)^{(R)} \arrow[d] & \supset U\times U \\ \xi_i \arrow[r] \arrow[u, bend left, "\text{のsection}"] & X \arrow[u, bend right] \arrow[uu, bend right] & \end{tikzcd}$$

いたるところ étale

$\longleftrightarrow$ 対応

$$\begin{tikzcd} Q_{F'}^{(r)} \arrow[r] \arrow[d] & Q_{S'}^{(r)} \arrow[d] \\ P_{F'}^{(r)} \arrow[r] \arrow[d] & P_{S'}^{(r)} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\, F' \arrow[r] & S' \end{tikzcd}$$

$G^{r+} = \{1\}$

étale

(G) Gが巾零なら成り立つ.

(Dの各幾何的点 $\bar{x}$ の惰性群 $I_{\bar{x}}$ の p-sylow群が正規部分群ならOK.

codim 1 ならみたされる条件.

付値環 blow-up すればみたされる条件

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[d] & W \arrow[l] \arrow[d, "\text{étale}"] \\
X \arrow[r] \arrow[ur, bend left] & (X*X)^{(R)} & U\times U \arrow[l, phantom, "\supset"]
\end{tikzcd}$$

Zariski-永田 の purity:

X: ネーター正則スキーム $U\subset X$ dense open

$V\to U$ finite étale $Y\to X$ V の中での整閉包とする.

X の codim 1 の点 (=局所環が D.V.R) がすべて

U に含まれるなら $Y\to X$ も étale

G が abel なとき D のすべての既約成分で $G_{i,\log}^{r_i}=\{1\}$

なら, $Z\to (X*X)^{(R)}$ は étale

$$\begin{tikzcd}
D_i \subset X \arrow[r] \arrow[dr] & Z \arrow[d] & & \\
E_{\xi_i}\subset E_R\subset & (X*X)^{(R)} \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[dl, phantom, "\square"] & U\times U \arrow[l, phantom, "\supset"] \arrow[d, "\Delta\ \text{smooth}"] \\
D\subset R\subset & X & U \arrow[l, phantom, "\supset"]
\end{tikzcd}$$

ξ_i, η_i

$r_i>0$ とする

$(X*X)^{(R)}$ の $\underbrace{\text{余次元1の点}}_{E_{\xi_i}\text{ の生成点 }\eta_i\text{ である}}$ で $U\times U$ に含まれないものは

$Z\to (X*X)^{(R)}$ が η_i で étale をいえば

Z-N が適用できる.

No.
Date

$$\begin{array}{ccc} \xi_i \in X & \hookrightarrow & Z \\ \updownarrow & \| & \downarrow \\ \xi_i \in X & \subset & (X\times X)^{(R)} \\ & & \cup \\ \eta_i \in E_{\xi_i} & \subset & E_R \end{array}$$

← abel ⇓ Galois 被覆 なので $\xi_i\,(\in (X\times X)^{(R)})$ 上にある Z のすべての点で étale.

(したがって $\xi_i\,(\in (X\times X)^{(R)})$ で étale

η_i は ξ_i の generization で étale は open condition だから η_i も étale.

G が巾零：G の正規部分群の減少列 G^i で $[G, G^i] \subset G^{i+1}$, $G^n = \{1\}$ をみたすものがある
$(G = G^0)$

$$\begin{array}{ccccc} Z = Z_n & \supset & V\times V/\Delta G & & V_i = V/G^i \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \vdots & & \vdots \ \swarrow \text{Galois} & & \\ Z_1 & \supset & V_1\times V_1/\Delta G & & \\ \downarrow & & \downarrow \ \swarrow \text{Galois} & & \\ X \to (X\times X)^{(R)} = Z_0 & \supset & U\times U & & \end{array}$$

$X \to Z_i$ の近傍で $Z_{i+1} \to Z_i$ が étale をいえばよい.

↑ abel なときの議論をくり返せばよい

$$\begin{array}{c} Gal(V_{i+1}/V_i) \\ \| \\ G^i/G^{i+1} \end{array}$$

$(G^i\times G^i)\cdot\Delta G \subset G\times G$
D (商は abel)
$(G^{i+1}\times G^{i+1})\cdot\Delta G \subset G\times G$

$V \to U$ の分岐 R をよく下とする.

$$\begin{tikzcd} Z & W \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\ (X\times X)^{(R)} \arrow[from=u] & U\times U \arrow[l, phantom, "\supset"] \end{tikzcd}$$

$(U\times U)\times_{U\times U}(U\times U) \rightrightarrows U\times U$ 亜群　$(\Delta(G\times G))\cap(G\times\Delta G) = \Delta G$

$W\times_U W \rightrightarrows W$　〃

$(X\times X)^{(R)}\times_X (X\times X)^{(R)} \to (X\times X)^{(R)}$　〃

$Z^\circ \subset Z$　開部分スキームで $(X\times X)^{(R)}$ 上 étale な最大のもの.

$$\begin{tikzcd} Z^\circ & Z \\ X \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(abel なら $Z = Z_0$)

$$\begin{tikzcd} Z_0\times Z_0 \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & Z_0 \arrow[d, phantom, "\cap"] \\ ((Z\times_X Z)\text{の正規化}) \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ (X\times X)^{(R)}\times_X (X\times X)^{(R)} \arrow[r] & (X\times X)^{(R)} \end{tikzcd}$$

normal

étale

$\cdots\to Z_0$ 亜群

$Z^\circ = Z_0$

$$\begin{tikzcd} Z^\circ_R \arrow[d, "\text{群スキームの étale 射}"] \\ E_R = V(\Omega^1_X(\log D)(R))\times_X R \end{tikzcd}$$

No.

Date

D 既約　$\underset{\kappa(\xi)}{\overset{F}{\shortparallel}}$　D の関数体　$K = \mathrm{Frac}(\hat{\mathcal{O}}_{X,\xi})$　ξ D の生成点

$\mathcal{Z}^0_F = \mathcal{Z}^0 \times_X \xi$　体 F 上 smooth affine morphism

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z}^0 \arrow[r, "\text{étale}"] \arrow[rr, bend right, "\text{smooth}"'] & (X*X)^{(R)} \arrow[r, "\text{smooth}"] & X \\ & & \mathrm{Spec}\, F \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$G^r_{\log}$
$\shortparallel$

$0 \to H \to \mathcal{Z}^0_F \to E_F \to 0$　$\mathcal{Z}^0_F$ は E_F 上の H-torsor
$\Rightarrow$ affine.

F 上の vector sp.

open map

像は開部分群

E_F は連結だから全射.

$\left(H = G^r_{\log} / \cancel{G^{r+}_{\log}} \right)$　$0 \to G^r_{\log} \to (\mathcal{Z}^0_F)_0 \to E_F \to 0$

中心的降下列として上つき分岐群の列を考える.

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{Z}^0_F)_0 \arrow[d] & \mathcal{Z}_r \arrow[d] \\ E_F \arrow[d] & \mathcal{Z}_{r'} \arrow[d] \\ \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\ E_F \subset \mathcal{Z}_0 = (X*X)^{(R)} \arrow[uu, bend left] & {} \end{tikzcd}$$

) $G^r_{\log}$-torsor $\Rightarrow$ Ker は $G^r_{\log}$ (torsor)
集合として

これと $G^r_{\log}$ の群演算から定まる $G^r_{\log}$ の群構造は一致する.

$(\mathcal{Z}^0_F)_0$　$\mathcal{Z}^0_F$ の単位元を含む連結成分
~~の核は G の元で単位元と属~~
$(\mathcal{Z}^0_F)_0 \to E_F$ の連結成分に入るものからなる $= G^r_{\log}$