No.

Date ·5·10

$\mathcal{O}_K[X_1,\dots,X_n]/(f_1,\dots,f_n) \to \mathcal{O}_L$

$f: D^n \to D^n \quad (x_1,\dots,x_n) \mapsto (f_1,\dots,f_n)$

$\quad\cup \qquad \cup$

$f^{-1}(D^n(0,r)) \quad D^n(0,r)$

$\uparrow$

これの連結成分… $\quad G^r < Gal(L/K) = G$

例

$n=1$のとき $\quad \mathcal{O}_K[X]/(f) \simeq \mathcal{O}_L$

レポート $\quad E = \mathcal{O}_L/m_L$ が $F = \mathcal{O}_K/m_K$ の分離拡大なら、

$\mathcal{O}_L$は$\mathcal{O}_K$上1つの元で生成される。

$f^{-1}(D(0,r))$ 有限個の closed disc の disjoint union

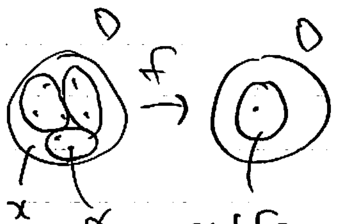
何個？

$\parallel$

$\bigcup_{\alpha: f(\alpha)=0} D(\alpha, *)$

$\uparrow$

$\varphi(r)$ Herbrand 関数



ord $f(x+\alpha) \geq n$

上のnとは違う

$f(x+\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$

$= x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}$

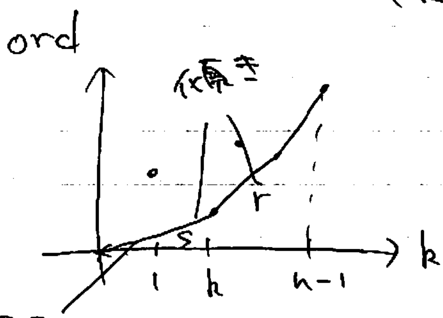
$1, a, \cdots, a_{n-1}$ の付値

$n \operatorname{ord} x^{n-1}$

a_{n-k} の付値に $\operatorname{ord} x \times k$ のゲタをはかせてとこと重交

Newton 多角形

$(k, \operatorname{ord} a_k)$



ord$(\alpha_i - \alpha)$のうちで最小

$s < \operatorname{ord} x < r$ のとき

$\operatorname{ord} a_{n-k} + k \operatorname{ord} x$ が最小

なので, $\operatorname{ord} f(x+a) =$

$s \leq \operatorname{ord} x \leq r$ のとき $\geq$

$s < t < r$ のとき（$= s_{k+1}$）

$$f^{-1}(D(0,t)) = \bigcup_{\alpha} D(\alpha, \varphi(t))$$

$\varphi(t) = \operatorname{ord} a_{n-k} + k \cdot t$ とおいた.

piece wise linear　convex.

これらの付値で下つき分岐群

$$f(x+\alpha) = \prod (x - (\alpha_i - \alpha))$$

$$a_k = (-1)^k \sum_{i_1 < \cdots < i_k} (\alpha_{i_1} - \alpha) \cdots (\alpha_{i_k} - \alpha)$$

$$f(x) = \prod (x - \alpha_i)$$

$\alpha_i = \sigma_i(\alpha)$

$\sigma_i \in G_j \iff \operatorname{ord}_c(\alpha_i - \alpha) \geq j$

No.

Date

おれまがり $k=|G|-|G_i|$ みて

$$\mathrm{ord}\, a_k = \sum_{\alpha\in G\setminus G_1} \mathrm{ord}(\sigma(\alpha)-\alpha)$$

下つき分岐群 → Newton polygon → Herbrand f'n → $f'(D(0,r))$

レポート これを清書.

上つき: G^r の def.

これから

 r軸

切れ目は有理数

$\lim_{s\to r-0} G^s = G^r$ 左連続

リジッド幾何を使う証明のみ.

なので, この話はしない.

$\lim_{s\to r+0} G^s = G^{r+}$ $\quad G^r/G^{r+} = \mathrm{Gr}^r G$ の構造

$\mathrm{Gr}^r G$ アーベル群 $p(=\mathrm{ch}\, F)$ 倍で 0 $(\simeq \mathbb{F}_p^n)$

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Gr}^r G, \mathbb{F}_p) \underset{\mathrm{rsw}}{\hookrightarrow} \text{微分形式の群}$$

リジッド幾何から代数幾何へ.

No.
Date

$\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_n)$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_L & \leftarrow & Q = \mathcal{O}_K[x_1, \ldots, x_n] \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{O}_K & \leftarrow & P = \underbrace{\mathcal{O}_K[s_1, \ldots, s_n]} \end{array}$$

finite flat と思う.

(QはP加群として有限生成自由)

$f_i \mapsto s_i$ 　 $f : D^n \to D^n$ 　 $\hat{Q} \leftarrow \hat{P}$ 　 $D^n(0,r) \subset D^n$

$\hat{P} = \varprojlim_n P/\pi^n P = \underline{\mathcal{O}_K\langle s_1, \ldots, s_n\rangle}$

π進完備化

π：$\mathcal{O}_K$の素元

$r > 0$ 有理数　K'/K 有限次拡大 とし　$r \cdot e_{K'/K}$ は整数

$e_{K'/K}$：分岐指数

$P' = \mathcal{O}_{K'}\left[\frac{s_1}{\pi'^{er}}, \ldots, \frac{s_n}{\pi'^{er}}\right] = \mathcal{O}_{K'}[s_1', \ldots, s_n']$ 　 $P \to P'$, $s_i \mapsto \pi'^{er} s_i'$

π'：$\mathcal{O}_{K'}$の素元

$Q' = Q \otimes_P P'$の正規化

$P' \to Q'$

$\xrightarrow{\pi'\text{進完備化}}$

$$\begin{array}{ccc} \hat{Q}' & \leftarrow & f^{-1}(D^n(0,r)) \\ \uparrow\ \text{formal} & & \text{リジッド} \\ \hat{P}' & \leftarrow & D^n(0,r) \otimes_K K' \\ \| & & \\ \mathcal{O}_{K'}\langle s_1', \ldots, s_n'\rangle & & \end{array}$$

$\mathcal{O}_{K'}$上のもの

左側の世界　closed fiber があるので微分形式と結びつく.

$M_n(\mathcal{O}_K[x_1,\dots,x_n], \mathcal{O}_E)$

※

$\mathrm{Mor}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_K[x_1,\dots,x_n], E) = \mathbb{A}^n_{\mathcal{O}_K}(E) = E^n$

$\uparrow$ ← 単射で像は $\mathcal{O}_E^n = D^n(E)$

$\mathrm{Mor}_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_K\langle x_1,\dots,x_n\rangle, E)$

$= \mathrm{Mor}(\mathcal{O}_K[x_1,\dots,x_n], \mathcal{O}_E)$

正規化の補題

代数幾何 $k[x_1,\dots,x_n] \supset I$ とすると、

$$k[T_1,\dots,T_d] \to \underset{\substack{\parallel \\ A}}{k[x_1,\dots,x_n]/I} \quad \text{単射}$$

A が $k[T_1,\dots,T_d]$ 加群として有限生成となるものがある。

リジッド版 $\mathcal{O}_K\langle x_1,\dots,x_n\rangle \supset I$ かつ $(\mathcal{O}_K\langle\ \rangle/I)\otimes_{\mathcal{O}_K} K \neq 0$ とすると

$$\mathcal{O}_K\langle T_1,\dots,T_d\rangle \to \underset{\substack{\parallel \\ A}}{(\mathcal{O}_K\langle x_1,\dots,x_n\rangle/I)_{\mathrm{tor}}} \quad \text{単射}$$

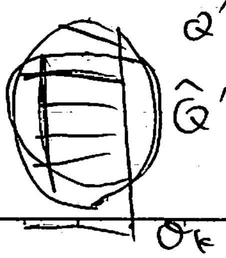
A が 加群として有限生成となるものがある。

レポート 証明を調べる。

$2^{\pi_0(f^{-1}(D^n(0,r)))} = \hat{Q}_{K'}$ の巾等元

$= \hat{Q}'$ の巾等元

$= \boxed{Q' \otimes_{\mathcal{O}_{K'}} F'}$ の巾等元



$F' = \mathcal{O}_{K'}/m_{K'}$

剰余体上の $\mathbb{A}^n_{F'}$ の有限被覆

$f: D^n \to D^n$ K上のリジッド幾何

$\cup \qquad \cup$

$f^{-1}(D^n(0,r)) \to D^n(0,r)$

$\mathcal{O}'\otimes_{\mathcal{O}_K}F' \to \boxed{\varphi'\otimes_{\mathcal{O}_{K'}}F'}$ F'上の代数幾何

K'のとり方による。 $= F'[S_1', \ldots, S_n']$

K'によらないものがほしい。

K'を十分大きくとれば一定（Eppの定理の帰結）

Eppの定理
- L/K 完備離散付値体の拡大（有限次とは限らない）
- $\exists K'/K$ 有限次拡大 $L\cdot K'/K'$ の分岐指数が1

<u>命題</u>

$X = \mathrm{Spec}\,A$ 　A $\mathcal{O}_K$上有限生成平坦

（整閉としてよい）$A\otimes_{\mathcal{O}_K}K$ は K上smooth とする。

1. Kの有限次拡大K'で、A'を$A\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_{K'}$の整閉包とすると、$A'\otimes_{\mathcal{O}_{K'}}\bar{F}'$が被約となるものがある。

2. Aが整閉かつ$A\otimes_{\mathcal{O}_K}\bar{F}$が被約とすると、$K$の任意の有限次拡大$K'$に対し、$A\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_{K'}$は整閉である。

↑ K'をとりかえても変わらない。

No.

Date

整閉

$\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$　A の素イデアルで $A/m_K A$ の極小素イデアルを定める.

$\hat{A}_{\mathfrak{p}_1}, \dots, \hat{A}_{\mathfrak{p}_n}$　完備離散付値環 $\supset O_K$

分数体　K の拡大

に EPP を適用 $\to$ K' がみつかる.

分岐指数 1 $\Rightarrow$ $A/m_K A$ が dense open で被約

$(R_0) + (S_1) \Rightarrow$

L/K　$r>0$　G^r/G^{r+}

必要なら L を中間体でおきかえて $G^{r+}=\{1\}$ とする

$\hat{Q}' \leftarrow \hat{P}'$ が有限エタール被覆

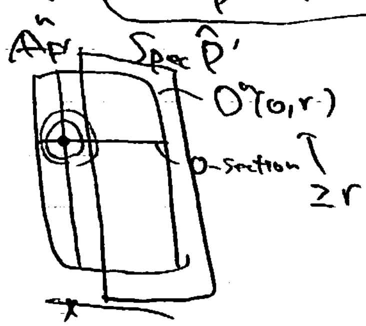
$\hat{Q}'$ は有限生成自由 $\hat{P}'$ 加群で, $\Omega_{\hat{Q}'/\hat{P}'}=0$

Zariski 純粋 purity

$\hat{P}' = O_{K'}\langle S_1', \dots, S_n'\rangle \to O_{K'}$ による $m_{K'}$ の逆像 $m_{\hat{P}'}$ とすると

$S_i' \mapsto 0$

$\hat{P}'$ で étale $\Leftarrow$ • $m_{\hat{P}'}$ では étale　• $D^n(0,r)$ でも étale (内容)



$\widehat{\hat{P}'_{m_{\hat{P}'}}} \otimes K$　open disc

$> r$

$O_{K'}\langle S_1', \dots, S_n'\rangle \to O_K[[S_1', \dots, S_n']]$

$\mathrm{Mor}(O_{K'}\langle S_1', \dots, S_n'\rangle, \bar{K})$　$\mathrm{Mor}(O_K[[S_1', \dots, S_n']], \bar{K})$

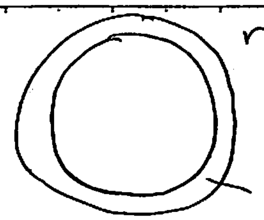
$\|$　　$\|$

$O_{\bar{K}}^n \geq 0$　$\supset$　$m_{\bar{K}}^n > 0$

$f^{-1}(D(0,r))$

$\downarrow$

$D(0,r)$ degree $= [L:K]$



$G^r = \{1\} \iff \#\pi_0(-) = [L:K] \iff f^{-1}(D(0,r)) = \coprod_{i=1}^{[L:K]} D(0,r)$

$\Rightarrow$ $Q'_{F'} \leftarrow P'_{F'}$ 有限エタール $A^n_{F'}$

加法群のエタール isogeny