K：完備離散付値体

L/K：有限次Galois　$G = \mathrm{Gal}(L/K)$

$i \geq 1$ 自然数　$G_i = \ker(G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_L/m_L^i))$

$$G_{i,\log} = \ker(G \to \mathrm{Aut}(L^\times/1+m_L^i))$$

$$G_i \supset G_{i,\log} \supset G_{i+1}$$

$\sigma \in G$ が $\sigma \in G_i$ とは　$a \in \mathcal{O}_L \Rightarrow \sigma(a) - a \in m_L^i$

$G_{i,\log}$　$a \in L^\times \Rightarrow \dfrac{\sigma(a)}{a} - 1 \in m_L^i$

$$\sigma(a) - a \in m_L^{i+\mathrm{ord}_L a}$$

$$G_{i,\log} = \left\{ \sigma \in G_i \,\middle|\, \frac{\sigma(\pi_L)}{\pi_L} - 1 \in m_L^i \right\}$$

$$G_{i+1} = \left\{ \sigma \in G_{i,\log} \,\middle|\, \sigma(a) - a \in m_L^{i+1},\ a \in \mathcal{O}_L \right\}$$

$$G_i \to \mathrm{Hom}(\overset{\cong\mathbb{Z}}{L^\times/\mathcal{O}_L^\times}, E^\times) \qquad i = 1$$

$$\mathrm{Hom}(L^\times/\mathcal{O}_L^\times, m_L^i/m_L^{i+1}) \qquad i > 1$$

$$\sigma \mapsto (a \mapsto \sigma(a)/a) \qquad i = 1$$

$$(a \mapsto \frac{\sigma(a)}{a} - 1) \qquad i > 1$$

α 核 $= G_{i,\log}$

No. ....

Date . .

$\Omega^1_{O_L/O_K} \twoheadrightarrow \Omega^1_{E/F}$

$E = O_L/m_L,\ F = O_K/m_K$

$$\sigma \in G_i \qquad \sigma(a) \equiv a \mod m_L \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Omega^1_{E/F}, m_L^i/m_L^{i+1})$$

$$\cap$$

$$G_{i,\log} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{O_L}(\Omega^1_{O_L/O_K}, m_L^i/m_L^{i+1})$$

$$\parallel$$

$$\mathrm{Der}_{O_K}(O_L, m_L^i/m_L^{i+1})$$

$$\ni (a \mapsto \sigma(a) - a)$$

$$\sigma(ab) - ab = (\sigma(a) - a + a)(\sigma(b) - b + b) - ab$$

$$= a(\sigma(b) - b) + b(\sigma(a) - a) + \underbrace{(\sigma(a) - a)(\sigma(b) - b)}_{\in\, m_L^{i+1}}$$

$\mathrm{Ker}(\Omega^1_{O_L/O_K} \to \Omega^1_{E/F})$ は da, $a \in m_L$ で生成される.

$\sigma \in G_{i,\log}$ $a \in m_L \Rightarrow \sigma(a) - a \in m_L^{i+1}$

$$\begin{array}{ccc} & \Omega^1_{O_L/O_K} & \\ G_i & \supset & G_{i+1} \\ \cup & & \cap \\ G_{i,\log} & \supset & \\ & \Omega^1_{O_L/O_K}(\log/\log) & \end{array}$$

$\mathrm{Im}(\Omega^1 \to \Omega^1_{\log}) = \Omega^1_{E/F}$

$\mathrm{Coker}(\Omega^1 \to \Omega^1(\log))$

$\overset{\mathrm{res}}{\cong} E$

No.
Date

ker $a \in \mathcal{O}_L \Rightarrow \sigma(a) - a \in m_L^{i+1}$

$= G_{i+1}$

$G_1 = I$

$G_{1,\log} = P$　Iのp-sylow群

I/P　位数がpと素な巡回群

群の正規部分群とは何か.

群とはGalois categoryである.

正規部分群とはfiber functorのquotient functorで
何かの条件をみたすもの.

G：有限群　$\mathcal{C}$：Gの作用つきの有限集合のなす圏 $= \mathcal{C}_G$

$\mathcal{C}$の対象　有限集合XとXへのGの作用の対.

$\mathcal{C}$の射　写像$X \to Y$でGの作用を保つ.

$F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$　恒等関手　$F(X) = X$　fiber functor
$\| F_G$

$G = \mathrm{Aut}(F)$

補題1

G: 有限群, $\mathcal{C}=\mathcal{C}_G$, $F=F_G$ とする

$F'\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}$ を関手とし, $F\to F'$ 関手の射とする.

次の条件をみたすとする.

(1) 任意の X に対し, $F(X)\to F'(X)$ が全射である.

(2) 〃 X, X' 〃 $F'(X)\amalg F'(X')\to F'(X\amalg X')$ は同形である.

(3) $X\to Y$ が全射なら,

$$\begin{tikzcd} & F(X) \arrow[r] \arrow[d] & F(Y) = F(X)/\sim \arrow[d] \\ F(X)/\simeq \; = & F'(X) \arrow[r] & F'(Y) = F(X)/\langle \sim, \simeq \rangle \end{tikzcd}$$

が cocartesian である.

このとき $N := \{\sigma\in G \mid$ すべての X に対し, σ の $F'(X)$ への作用は自明$\}$

は正規部分群であり, ひきおこされる射

$$F(X)/N \longrightarrow F'(X)$$

は同形.

証明　XにGがtransitiveに作用するとき $F'(X)=X/\sim$ をみればよい.

(2) $X=G/H$ とてよい.　$H\subset G$ 部分群

(1) $X=G$　　$F(G)=G \to F'(G)=G/K$　K 部分群

(3)
$$\begin{tikzcd}
G = F(G) \arrow[r] \arrow[d] & F(G/H) = G/H \arrow[d] \\
G/K = F'(G) \arrow[r] & F'(G/H) = G/\langle H,K\rangle = H\cdot K
\end{tikzcd}$$

Kが正規部分群であることをいえばよい.

$H=K$　$\tau\in G$　$\tau K\tau^{-1}=K$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\tau"] \arrow[d] & G/K \arrow[d] \\
G/K \arrow[r] & G/\langle K^{\tau},K\rangle
\end{tikzcd}
\qquad a\mapsto \overline{a\tau}$$

$G/\langle K^{\tau},K\rangle = F'(G/K) = G/\langle K,K\rangle = K$

$\Rightarrow K=\langle K^{\tau},K\rangle$　$K^{\tau}\subset K$ //

No.

Date

幾何的にcocartesianな図形を作る.

補題2

Z: 連結な位相空間, $z \in Z$

$\pi: X \to Z$ 位相空間の開かつ閉な連続写像

Xの連結成分は有限コとする.

1. $X_z := \pi^{-1}(z) \to \pi_0(X) = \{X$の連結成分$\}$ は全射 ((1),

2. $f: X \to Y$ を開かつ閉な連続全射の可換図式とする.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X_z \arrow[r] \arrow[d] & \pi_0(X) \arrow[d] \\ Y_z \arrow[r] & \pi_0(Y) \end{tikzcd}$$

は cocartesian.

証明 1. レポート

2. $2 = \{0, 1\}$, $2^{\pi_0(Y)} \hookrightarrow 2^{\pi_0(X)} \times_{2^{X_z}} 2^{Y_z}$ が可逆をいえばよい.

$\parallel$

$\{Y$の開かつ閉$\}$

右の集合の元 Xの開かつ閉な部分集合C

Y_zの部分集合 A で,

$$C \cap X_z = f^{-1}(A)$$

レポート

↓

に対し, Yの開かつ閉な部分集合C'で $f^{-1}(C') = C$

$C' \cap Y_z = A$

となるものをとってくればよい.

No.

Date

fが全射

$C' = f(C)$ とすると $A = f(f^{-1}(A)) = f(C \cap Y_2) = f(C) \cap Y_2$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{f^{-1}(Y_2)} \qquad = C' \cap Y_2$

//

幾何的構成　1. リジッド幾何　naive
　　　　　　2. 代数幾何　翻訳　構造が豊か.

リジッド幾何

K：完備 d.v.f.　$O_K \subset K$ 付値環

O_K 上の affinoid alg. とは

O_K 上有限生成な環の π-進完備化
$\qquad A_0 \qquad \varprojlim_n A_0/\pi^n A_0 = A$

O_K 上の affine formal scheme

rigid 幾何 = " O_K 上の formal 幾何の生成 fiber "

$\mathrm{Spf} A \underset{\uparrow}{=} \mathrm{Spec}(A_0/\pi A_0)$
underlying set

L/K 有限次 Galois 拡大　O_L 付値環

$O_L = O_K[x_1, \cdots, x_n]/(f_1, \cdots, f_n)$

$O_L = O_K[x_1, \cdots, x_n]/I$　I/I^2 は rank n の自由 O_L 加群

$f_1, \cdots, f_n \in I$　I/I^2 の基底
$\Downarrow$
$O_L = O_K[x_1, \cdots, x_n]/(f_1, \cdots, f_n)\,[g^{-1}]$ なる g がある.

$= O_K[x_1, \cdots, x_n, Y]/(f_1, \cdots, f_n, gY - 1)$

No.

Date . .

レポート問題

A, B：ネーター正則局所環

$f: A \to B$ 局所環の射 $f^{-1}(m_B) = m_A$

B：A加群として階数 r の自由A加群とする.

$P = A[x_1, \cdots, x_n] \to B$ A上の環の全射, $I = \mathrm{Ker}$ とする

① $I/I^2 = B \otimes_P I$ は rk n の自由B加群であることを示せ.

② $f_1, \cdots, f_n \in I$ I/I^2 の基底のもち上げとする.

$$\begin{array}{ccc} Q = A[S_1, \cdots, S_n] & \to & P = A[x_1, \cdots, x_n] \\ \psi & & \psi \\ S_i & \longmapsto & f_i \end{array}$$

で定める.

このとき, A上の étale 射 $g: Q \to Q'$ と Q' の極大イデアル

m' で $g^{-1}(m') = m_A + (S_1, \cdots, S_n)$ をみたし,

$P' = P \otimes_Q Q' = P_1' \times P_2'$ と環の積に分解し,

P_1' は階数 r の自由Q'加群で, $P_2'/m'P_2' = 0$ である

ものが存在することを示せ.

$Q \to Q'$ 環の射が étale とは Q'がQ加群として

平坦で $\Omega^1_{Q'/Q} = 0$.

$$
\begin{array}{ccc}
Q & & \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \\
\mathcal{O}_K[S_1,\dots,S_n] & \xrightarrow{F} & \mathcal{O}_K[X_1,\dots,X_n] = P \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
S_i & \longmapsto & f_i \\
\downarrow \quad \rotatebox{90}{$\mapsto$} & & \\
\mathcal{O}_K \quad 0 & &
\end{array}
$$

$$P \otimes_Q \mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K[X_1,\dots,X_n]/(f_1,\dots,f_n) = \mathcal{O}_L$$

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} P \arrow[r] & \operatorname{Spec} Q \\
\mathbb{A}^n_{\mathcal{O}_K} \arrow[u, equal] & \mathbb{A}^n_{\mathcal{O}_K} \arrow[u, equal] \\
\operatorname{Spec} \mathcal{O}_L \arrow[u] \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathcal{O}_L \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$