分岐と blow-up

被覆，エタール層，微分方程式

例1　$t^p - t = \frac{1}{x}$　　k char $= p > 0$, $\mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[x]$

$x = 0$ で分岐

$\mathbb{A}^2_k = \mathbb{A}^1_k \times \mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[x\otimes 1, 1\otimes x] = \operatorname{Spec} k[x, y]$

原点 $(0,0)$　　(x, y) で blow-up　$t^p - t = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$

$\uparrow$

$\operatorname{Spec} k[x, y, (\frac{y}{x})^{\pm 1}]$　　$y = ux$, $\frac{y}{x} = u$

$(x, y, u-1)$ で blow-up

$\uparrow$

$\operatorname{Spec} k[x, u^{\pm 1}, \frac{u-1}{x}]$　　$\frac{u-1}{x} = v$

分母が$\underline{\text{きえる}}$
可逆

$u = 1 + vx$

char $k = 0$

$\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{G}_m} \cdot e$　$\mathbb{G}_m = \operatorname{Spec} k[x, x^{-1}]$ 上の可逆層

$\mathcal{L}$ 上の可積分接続　$\nabla : \mathcal{L} \to \mathcal{L} \otimes \Omega^1$

$\nabla e = -\frac{1}{x^2} dx \otimes e$　　解 $\exp \frac{1}{x}$

$\nabla e' = (-\frac{1}{x^2} dx + \frac{1}{y^2} dy) \otimes e'$

No.

Date

分岐

k：代数体　$\mathbb{Q}$の有限次拡大.

$n \geq 1$ 自然数

・L/k n次拡大. $d(L/k)$ 判別式（分岐の不変量）

　d 自然数　$d(L/k) \leq d$ の Lの同型類は有限コ.

　　(Hermite - Minkowski)

・E/k 楕円曲線　$N(E)$ 導手（分岐の不変量）

　N：自然数　$N(E) \leq N$ の Eの同型類は有限コ.

・Langlands対応

　Galois表現 ⟷ 保形形式

　導手 ⟷ レベル

・代数体　導手・判別式公式
　楕円曲線　Tate - Ogg公式
　→ Blochの導手公式

幾何的な類似 | 代数体と関数体の類似

Riemann - Hurwitzの公式.

webpage

参考文献
- 2010 ICM proceedings
- Arizona Winter School
- J-P. Serre Corps Locaux, Hermann
- Q. Liu Algebraic geom & arithmetic curv Oxford

$f: X \to Y$ 完全体 k 上の proj. smooth 代数曲線の有限射
generic には étale

$\updownarrow$

k 上の1変数代数関数体の有限次分離拡大

$$2g_X - 2 = [X:Y](2g_Y - 2) + \sum_{x \in X} \dim_k(\Omega^1_{X/Y,x})$$

X の種数　被覆の次数　微分形式の加群

分岐指数 $e_{x/y}$ ($y = f(x)$)　$p = \mathrm{char}\, k \nmid e_{x/y} \Rightarrow \dim = e-1$ 馴分岐
$(\ e_{x/y} \Rightarrow)$　$> e-1$ 暴分岐

ℓ 進層に対しても類似の公式: Grothendieck-Ogg-Shafarevich の公式
SGA 5
高次元化 (2009年の講義)

$\sum_{x\in X} \dim_k(\Omega^1_{Y/X,x})$：各点での分岐の寄与

古典的…扱う対象が1次元…代数体の整数環
(完全体上の)代数曲線

…各点…局所体・剰余体が完全な完備離散付値体

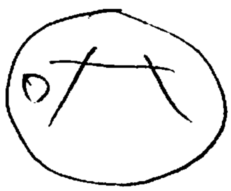
…高次元…完備離散付値体でも剰余体は完全でない

↑

これだけでは不十分

↑

境界の因子の生成点



×

方法…伝統的：被覆や層の分岐をけすような被覆を使う

新しい：———— blow-up

1. 完備離散付値体の分岐群

2. Galois被覆の分岐とblow-up：分岐群の次数商,
微分形式, isogeny

3. ℓ進層の分岐とEuler数, 特性類, 階数1の場合

スキーム, エタール位相

1. 局所体の分岐群

discrete valuation ring

dvr

K: 完備離散付値体　　O_K 整数環

$\uparrow$

完備 離散付値環の分数体

$\uparrow$

体でない局所PID

極大イデアル $m_K \neq 0$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\, \| $

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; (\pi_K) \quad \pi_K \neq 0$

素元

O_K が m_K 進完備

$O_K \to \varprojlim O_K/m_K^n$ が同形

$$\begin{array}{ccc} K^\times/O_K^\times & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z} \ni 1 \\ \uparrow & \nearrow_{v_K = \mathrm{ord}_K} & \\ K^\times \ni \pi_K & & \end{array}$$

例1 ・$\mathbb{Q}_p$ とその有限次拡大

・$k((T))$ 体上1変数の巾級数体

・$\hat{O}_{X,x}$ X がネーター正規スキーム, D X の既約因子

x D の生成点,

局所環 $O_{X,x}$ の完備化 $\varprojlim_n O_{X,x}/m_x^n$

レポート問題1

これらが c.d.v.f であることを確かめる.

No.

Date

K cdvf (complete ... field)

L/K 有限次Galois拡大　$G = Gal(L/K)$

分岐群　$G = Gal(L/K)$ の正規分岐群の減少列 filtration を自然な方法で定義する

		log なし	log つき
G^r	上つき		
G_i	下つき		

・下つき　定義が簡単
　部分群に対して安定

・上つき　定義が難しい
　商群に対して安定

$L \supset M \supset K$　　$H = Gal(L/M) \subset G = Gal(L/K)$

$(G_i \cap H) = H_i$

M : Galois　　$G \to G/H$

$$Im(G^r \to G/H) = \underbrace{(G/H)}_{=Gal(M/K)}{}^r$$

O_L　Lの中でのO_Kの整閉包 $= \{a \in L \mid a$はO_K上整$\}$

$\Leftrightarrow O_K[a] \subset O_L$

O_K加群として有限生

レポート問題　A 離散付値環　K 分数体　L 有限次分離拡

<u>B LでのAの整閉包なら、Bは PID であることを示せ</u>

さらにAが完備なら $B \in$ CDVR であることを示せ

$\mathcal{O}_L$ 完備離散付値環 $\supset m_L$：極大イデアル

$\circlearrowleft$

G $\quad G_i = \ker(G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_L/m_L^i))$ $i \geq 1$ 自然数

$G_{i,\log} = \ker(G \to \mathrm{Aut}(L^\times/1+m_L^i))$ 〃

$$\begin{array}{ccccc} G_1 & \supset & G_2 & \supset & \cdots \\ \cup & \supset & \cup & \supset & \\ G_{1,\log} & \supset & G_{2,\log} & \supset & \cdots \end{array}$$

$E = \mathcal{O}_L/m_L$

$$G_{i,\log} = \begin{cases} \ker(G_i \to E^\times) & i=1 \\ \ker(G_i \to m_L^{i-1}/m_L^i) & i>1 \end{cases}$$

$i=1 \quad \sigma \mapsto \sigma(\pi_L)/\pi_L \quad \pi_L$：Lの素元

素元のとり方によらない表示

$>1 \quad \sigma \mapsto \dfrac{\sigma(\pi_L)}{\pi_L} - 1$

$$G_{i+1} = \ker(G_{i,\log} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_L}(\Omega^1_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_K}, m_L^i/m_L^{i+1}))$$

$$\searrow \mathrm{Hom}_E(\Omega^1_{E/F}, m_L^i/m_L^{i+1})$$

$$\sigma \mapsto (db \mapsto \sigma(b) - b)$$

$$\sigma(bb') - bb' = (\sigma(b)-b)b' + b(\sigma(b')-b') \mod m_L^{i+1}$$

$A \to B$ 環の射 (単位元をもつ可換環)

$$\Omega^1_{B/A} = \bigoplus_{b \in B} Be_b \Big/ (e_{bb'} - (be_b + b'e_b)\ (b, b' \in B), e_a\ (a \in A))$$

$db \leftarrow\!\!| \ e_b \qquad d(bb') = bdb' + b'db$

$\mathrm{Hom}(\Omega^1_{B/A}, M)$ M : B加群

$= \mathrm{Der}_A(B, M) = \{ d : B \to M \mid d(bb') = bdb' + b'db,\ da = 0$
$(b, b' \in B) \quad (a \in A)$

$G_i = \ker(G \to \mathrm{Aut}(E)) = I$ 惰性群

$G_1 / G_{1,\log}$ $E^\times$ の有限次部分群と同形
巡回群で位数が $p = \mathrm{char}\, F$ でわれない.

$G_{i,\log} / G_{i+1}$ $\quad G_i / G_{i,\log}$ は elementary abelian p-gp.
$i \geq 1 \qquad i \geq 2 \qquad \mathbb{F}_p$-線形空間

$G_i = \{1\}$ $i \gg 0$

$G_{1,\log}$ は $I = G_1$ の p-sylow 群 $(p \neq 0)$
$\{1\} \qquad (p = 0)$