12/21. $R=T \Rightarrow MLT \Rightarrow LT.$

MLT $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(E_\lambda)$ 連続, 既約, odd

"Conductor N", wt k + ..

$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{F})$ の $G_{\mathbb{Q}(\zeta_p)}$ への制限が絶対既約.

$\bar{\rho} = \rho \bmod \lambda$

このとき $\bar{\rho}$ が "level N" wt k で modular

$\Rightarrow \rho$ も 〃 〃 で modular

<u>R=T</u>. $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{E_\lambda}$, R: 完備局所 Noether 環 / $\mathcal{O}$

剰余体 $\mathbb{F}$ (定義はあと)

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(R, \mathcal{O}) \overset{1:1}{=} \{\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathcal{O})$: cond N, wt k, $\bar{\rho}$ のもちあげ$\}/\sim$

$R \twoheadrightarrow T$ $\cup$

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(T, \mathcal{O}) = \{\rho$; — modular$\}$

構成して 同型 って示せば MLT.

F (総実)代数体 $p = \ell$, Σ : F の有限素点の有限集合

$v \in \Sigma \Rightarrow v \nmid p$

$\Sigma_p = \Sigma \cup \{v \mid p\}$, $\Sigma_p \subset S$: ..

$\rho_\lambda : G_F \to GL_2(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{E_\lambda} \subset E_\lambda$ $\mathbb{F}$: 剰余体 fix.

$\Sigma = \{v : F$ の有限素点, $v \nmid p$, $\rho_\lambda|_{G_{F_v}}$ が分岐$\}$

$S \setminus \Sigma_p$ 補助 ・合同部分群を小さくして, 位数有限の元がないようにするために使う素点.

・Taylor–Wiles の patching をするためにつけ加える素点.

$\det \rho_\lambda = \psi \chi^{k-1}$

finite order (ψ), l進cyclo (χ)

$G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \twoheadrightarrow G_S$: Sの外で不分岐最大商.

v 有限素点 $G_{F_v} = \mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$ $\overline{F} \subset \overline{F}_v$ fix.

$\mathcal{C}$: category obj 有限局所環$/\mathcal{O}$, 剰余体 $\mathbb{F}$.

A : $\mathcal{C}$ の obj

$\overline{\rho}$: $\rho_\lambda \bmod \lambda$ $G_F \to GL_2(\mathcal{O}) \to GL_2(\mathbb{F})$

$\overline{\rho}$ の A へのもちあげとは (ゆるい意味の 同形類)

自由 A加群 V_A rk 2, $\rho : G_S \to GL_A(V_A)$

$V_A \simeq A^2$ (A加群の同形)のくみで $\overset{\wr}{GL_2(A)}$

ゆるく ρ をひきおこすもの.

もちあげの同形類 $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ $\rho : G_S \to GL_2(A)$ で $\overline{\rho}$ をひきおこすもの.

det を保つ. $\Leftrightarrow$ $\det \rho : G_S \to A^\times$

$\det \rho_\lambda \searrow \mathcal{O}^\times \nearrow$ (ψ)

$\bar{\rho}$ の A への変形.

もちなげの定義で $V_A \simeq A^2$ を $V_A \otimes_A \mathbb{F} \simeq \mathbb{F}^2$（$\mathbb{F}$ 線形空間の同形）でおきかえる.

変形の同形類 $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ $\{\rho : G_S \to GL_2(A)$ で $\bar{\rho}$ をひきおこす$\}$ / （$1+m_A M_2(A)$ による共役.）

$\bar{\rho}$ の A への変形に, 各 $v \in \Sigma_p$ ごとにわくをつける.

$\rho : G_{\mathbb{Q}S} \to GL_A(V_A)$, $V_A \otimes_A \mathbb{F} \simeq \mathbb{F}^2$

$\rho|_{G_{\mathbb{F}_v}}$, $(V_A \simeq A^2)_v$ $V_A \otimes_A \mathbb{F} \simeq \mathbb{F}^2$

（v ごとのものは上のものと一致？）

$\mathcal{C} \to Set$

$A \mapsto \{\bar{\rho}$ の A への変形で各 $v \in \Sigma_p$ に対しわくをつけたもの$\}$ / 同形.

$\bar{\rho} : G_S \to GL_2(\mathbb{F})$ は絶対既約とする.

（$\mathrm{End}_{G_S}(\bar{\rho}) = \mathbb{F}$ で十分）

$\Rightarrow$ この function は pro representable.

$1 \to \ker \to GL_2(A) \to GL_2(\mathbb{F}) \to 1$

$\uparrow$

G_S.

$\ker \bar{\rho} \subset G_S$.

$\ker \bar{\rho}$ の pro-ℓ 完備化は有限生成 $\Leftarrow$ 類体論 + 類数の有限性

prorepresentable とは.

完備局所 Noeth 環 $R^\square/\mathcal{O}$, 剰余体 $= \mathbb{F}$

$A \mapsto \bigcirc \overset{(1:1)}{=} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(R^\square, A)$ となるものが存在すること.

わくつき変形環.

わくを考えないものも prorepresentable. R 変形環.

$\bar{\rho}|_{G_{F_v}}$ のわくつき変形 … prorepresentable. L_v

位相的に有限生成

$G_{F_v} \to GL_2(A)$ は有限個の生成元の行き先で決まり, 群の表現を定めるための条件は代数的な関係式.

各 $v \in \Sigma_p$ に対し, わくつき変形の族. $L = \hat{\bigotimes}_{v \in \Sigma_p} L_v$

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[r] & R^\square \simeq R[[\ldots]] \arrow[d, bend left] \\
 & R \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

T : Hecke 環　　　M 保型形式の空間

適当な level と wt.　　　〃

$\mathcal{O}$ 係数.　　　〃

$\bar{\rho}$ に対応する non-Eisenstein 極大イデアルで完備化　　　〃

T: $\mathcal{O}$ 上有限生成 (加群として), 被約.

M: 有限生成 T加群.

RとTの結びつき、— 保型形式にともなうGalois表現によって定義される.

$$G_S \to GL_2(T \otimes_{\mathcal{O}} E_\lambda)$$

$T \otimes E_\lambda = \prod E_{\lambda, f}$

char

f: てきような level, wt

normalized eigen

Hilbert modular form

保型形式にともなう

λ進表現の直積

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[drr] & \prod \mathcal{O}_{\lambda, f} \subset T \otimes_{\mathcal{O}} E_\lambda = \prod E_{\lambda, f} & \\
\overline{R} \arrow[u, shift left] \arrow[rr, two heads] \arrow[ur, dashed] & & T \arrow[ul, phantom, "\cup"]
\end{tikzcd}$$

$\cup$ ← finite index.

局所大域整合性

局所的な分岐条件で定義される環

Rは Trace によって生成される.

$$\rho^{univ} : G_S \to GL_2(R) \quad \text{普遍表現}$$

$$\sigma \mapsto \rho^{univ}(\sigma). \quad Tr(\rho^{univ}(\sigma)) \in R$$

$Tr(\rho_f(Frob_v)) \sim T_v$ + Cebotarev density

目標　全射 $R \to T$ が同型 ($\Rightarrow$ MLT).

$\uparrow$ 小　　$\uparrow$ 大.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] & R^{\square} & & \\ R \arrow[u] \arrow[r] & T \arrow[r] & \mathrm{End}(M) \end{tikzcd}$$

Taylor-Wiles の patching argument

(Faltings, Diamond, Fujiwara) (modified by Kisin)

n ごとに有限素点の有限集合 Q_n で

あとで出てくる条件をみたすものをみつけて

S を $S_n = S \cup Q_n$, $S \cap Q_n = \phi$

でおきかえる.

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[r] & R_n^{\square} & & \\ & \mathcal{O}[\Delta_n] \arrow[r, "\text{あとで}"'] & R_n \arrow[u] \arrow[r] & T_n \arrow[r] & \mathrm{End}(M_n) \end{tikzcd}$$

T 大.

$\uparrow$ 群環, $\Delta_n = \prod_{v \in Q_n} \Delta_v$, $\Delta_v = k(v)^{\times}$ の ℓ 部分.

位数 ℓ べきの巡回群.

条件. $v \in Q_n \Rightarrow N v \equiv 1 \bmod \ell^n \leadsto$ 位数 $\geq \ell^n$

$$\begin{array}{ccc} G_{S_n} & \twoheadrightarrow & G_S \\ \uparrow & & \uparrow \\ G_{F_v} & \to & G_{k(v)} \end{array}$$

$v \in Q_n$

$v \in Q_n$ での分岐がちょうど Δ_v で統制される(あとで)

$R_n \to R$　　$R_n \otimes_{\mathcal{O}[\Delta_n]} \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} R$ augumentation

T_n 〃 $\xrightarrow{\sim} T$

M_n 〃 $\Rightarrow M$

$R(1)$. $R_n^{\square}$ の L 上の生成元の個数を統制する.

R_n の $\mathcal{O}$ 上の 〃 = dim

det を保つ. can. isom.

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\text{環}}(R_n, \mathbb{F}[\varepsilon]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}\text{線型}}(m/m^2 + m_{\mathcal{O}}R_n, \mathbb{F})$.

$\varepsilon^2 = 0$.

$V_{\mathbb{F}}$: $\bar{\rho}$ の表現空間 $(\cong \mathbb{F}^2)$.

$V_{\mathbb{F}}$ の $\mathbb{F}[\varepsilon]$ への変形 $V_{\mathbb{F}[\varepsilon]}$

$(p \neq 2)$.　　$0 \to V_{\mathbb{F}} \to V_{\mathbb{F}[\varepsilon]} \to V_{\mathbb{F}} \to 0$.

$\mathrm{Ext}^1_{G_{S_n}}(V_{\mathbb{F}}, V_{\mathbb{F}})^0 = H^1(G_{S_n}, \mathrm{End}^0(V_{\mathbb{F}}))$.　Trace が 0

$\mathrm{End}^0(V_{\mathbb{F}}) = \mathrm{ad}^0(\bar{\rho})$.

$R_n^{A\square}$ の L 上の ‥‥

$= R_n^\square \otimes_L \mathbb{F}$ の $\mathbb{F}$ 上の生成元の個数.

L … $v \in \Sigma_p$

わくつき変形であってわくは自明なものと同形.

$V_A \simeq A^2$ が $V_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathbb{F}} A = A^2$ と同じ

$\mathbb{F}$alg てについて考えて OK.

$$\ker\left(H^1(G_{S_n}, ad^0(\bar\rho)) \to \bigoplus_{v \in \Sigma_p} H^1(G_{F_v}, ad^0(\bar\rho)) \right)$$

$$=: Sel_{S_n}$$

Selmer 群.

同形のとりかえ分. v ごとに $\ker(\mathrm{Aut}_{G_{F_v}}(V_{\mathbb{F}[\varepsilon]}) \to \mathrm{Aut}_{G_{F_v}}(V_{\mathbb{F}}))$

$$= H^0(G_{F_v}, ad(\bar\rho)).$$

生成元の個数 $= \dim Sel_{S_n} + \sum_{v \in \Sigma_p} \dim H^0(F_v, ad(\bar\rho))$

$\quad - \dim H^0(F, ad(\bar\rho))$.

(〃).

‖

変数の個数

$L[[X]] \to R_n^\square$

仮定：$G_{F(\zeta_\ell)}$ への制限の既約性を使う.

Q_n をうまくとることで n によらず一定で, しかも定まった値にできる