12/7 Serre予想の雑な証明の方針.

- Wiles証明の方針の復習.

$E/\mathbb{Q}$ 準安定楕円曲線

(good or multiplicative reduction)

$\Rightarrow E$ は modular

ℓ. $E[\ell]$ が定める mod ℓ 進表現 $\bar{\rho}_\ell : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{F}_\ell$

ℓ進 $\rho_\ell : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{Q}$

$\exists \ell$, ρ_ℓ が modular をいいたい.

- $\bar{\rho}_3$ が既約のとき.

$\bar{\rho}_3$: modular (Langlands–Tunnell)

$GL_2(\mathbb{F}_3)$ が可解

$\Rightarrow \rho_3$ が modular

Modularity Lifting theorem (MLT).

- (3, 5)-trick

$\bar{\rho}_3$ が可約のとき. … $\bar{\rho}_5$ は既約 (Mazur)

$\exists E'$: 別の準安定楕円曲線 $\bar{\rho}'_3$ 既約

$\bar{\rho}'_5 \simeq \bar{\rho}_5$ $G_{\mathbb{Q}}$ の法5表現として同形

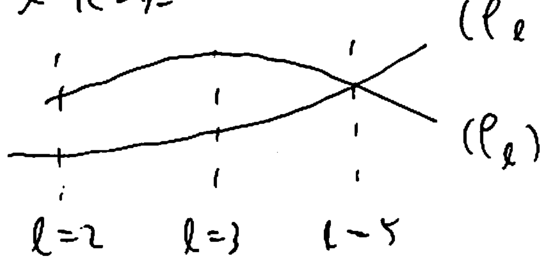
$\because$ $X(5)$ ~~の~~ の genus が 0

E' は modular $\Rightarrow$ $\bar\rho'_5$ modular $\Rightarrow$ ρ_5 modular

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\| \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \uparrow$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \bar\rho_5 \quad\quad\quad\quad\quad\quad$ MLT.

mod ℓ 表現



$\bar\rho_5 \simeq \bar\rho'_5$

$$\bar\rho \simeq \bar\rho_\lambda$$

$$\bar\rho \leftarrow (\rho_\lambda) \longrightarrow \bar\rho_\mu$$

compatible system

↑存在: Lifting theorem (LT)

MLT: $\bar\rho_\mu$ modular $\Rightarrow$ ρ_μ modular

$\Leftrightarrow$ (ρ_λ) modular

$\Rightarrow$ $\bar\rho$ modular

Lifting Theorem:

$\bar\rho$ modular $\Leftrightarrow$ $\exists f$ $(\rho_{f,\lambda})$, $\bar\rho_{f,\lambda} \simeq \bar\rho$

$\Downarrow$ $\Uparrow$ MLT/$\mathbb{Q}$

$\exists(\rho_\lambda)$ $\bar\rho_\lambda \simeq \bar\rho$ compatible system の lift の存在

$\Downarrow$ $\Uparrow$ MLT/F

$\exists \rho_\lambda$ 〃 ℓ-adic rep'n の lift の存在

R=T/F

・Lifting theorem

$\bar{\rho}: G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{F})$ $\mathbb{F}$: char ℓ, 有限体, odd 連続

$\bar{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}(\zeta_\ell)}}$ が絶対既約, Serre level N, weight $k \geq 2$

とする. このとき次がなりたつ.

LT (crys): compatible system $(\rho_\lambda | G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(E_\lambda))_\lambda$ で

s.t. $\bar{\rho}_{\lambda_0} = \bar{\rho}$ $(\exists \lambda_0 | \ell)$ で (ρ_λ) の level ($=$conductor) $= N$

Weight k ($\Leftrightarrow$ HT weight $(0, k-1)$)

であるものが存在する. ただし, $2 \leq k \leq \ell+1$ と仮定する.

LT($k=2$): (ρ_λ) で s.t. $\bar{\rho}_{\lambda_0} = \bar{\rho}$ $(\exists \lambda_0 | \ell)$

(ρ_λ) の level $N \times \ell$ や であり, weight $= 2$

であるものが存在する.

・Modularity Lifting theorem

$\rho: G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(E_\lambda)$ 連続ℓ進表現, geometric (= 有限個の素点をのぞき不分岐 かつ pot. semi-stable)

odd, $\bar{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}(\zeta_\ell)}}$ が絶対既約.

level N ($\ell | N$ かもしれない)

wt $k \geq 2$

このとき 次がなりたつ.

2/7.

MLT ($k=2$): ℓを2とする.

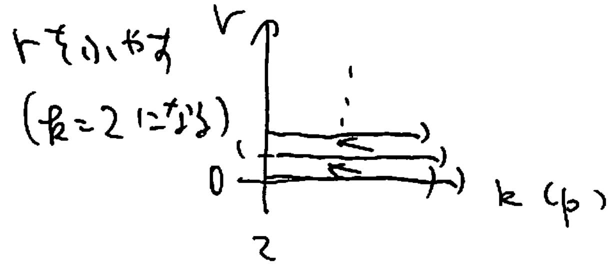
$\bar{\rho}$が modular ⇒ ρも modular

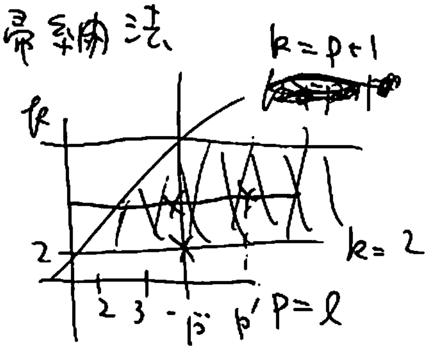
MLT (k crys): $2 \leq k \leq \ell+1$ かつ $\ell \nmid N$ とすると
(crystalline)

$\bar{\rho}$が modular ⇒ ρも modular

r: Nの素因数の個数

rとk, pに関する2重帰納法





① rをふやす.

$\bar{\rho}$ $k=2$ N が modular を示したい.

(Nの素因数が1つでも少ないものに対しては示されている).

LT(crys) より (ρ_λ) で $k=2$ で同じNのものがある.

$q|N$, 素因数 $\mu|q$, $\bar{\rho}_\mu$ の Serre level は

Nでわりきる. qと素 $\bar{\rho}_\mu$は帰納法の仮定より modular

MLT ($k=2$) より (ρ_μはqで crystallineではない.
(MLT (crys) は使えない).)

ρ_μ は modular $\Rightarrow$ ρ_λ 〃 $\Rightarrow$ $\bar{\rho}$ 〃

$\Delta(q) = \sum \tau(n) q^n$ Ramanujan Δ

$= q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24}$ wt 12, level 1.

$f_{11}(q) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^2 (1-q^{11n})^2$

$E = X_0(11)$ に対応する mod. form

wt 2, level 11.

$\bar{\rho}_{E,11} \cong \bar{\rho}_{\Delta,11} \mod 11$.

$(p=11)$ $S_2(\Gamma_0(p), \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\sim} S_{p+1}(SL_2(\mathbb{Z}), \mathbb{F}_p)$

② p を変える. $2 \le k \le p+1$ (r fix).

$(p, 2)$, (p, k) ok $\Rightarrow$ (p', k) $(k \le p'+1)$

ok

$\bar{\rho}$ mod p' 表現 N, k.

(1) $p \nmid N$ LT (crys) より level N, wt k

$\bar{\rho}_\lambda = \bar{\rho}$ がある.

$\mu | p$ $\bar{\rho}_\mu$ level N の約数. wt k.

$p \nmid N$ より MLT (crys) が適用できて, ρ_μ modular $\Rightarrow$ - -

(2) $p \mid N$ LT ($k=2$) (ρ_λ) level $N \cdot p'^{\text{ゆ}}$
wt 2.

$\mu \mid p$, $\bar{\rho}_\mu$ の level は $N \cdot p'^{\text{ゆ}}$ であるが p とは素.

(p, 2) OK より modular wt 2.

MLT ($k=2$) より、ρ_μ modular ⇒ ...

③ k をふやす. $\bar{\rho}$ N, k $k > p+1$

← mod p' 表現

$k \le p+1$ で OK に帰着.

$p'-1$ の 2 でない素因数 l. $l^\nu \| p'-1$.

$k' \equiv k \mod \frac{p'-1}{l^\nu}$ かつ $k' \le p+1$

に帰着させる.

$\bar{\rho}$ .. (ρ_λ) LT ($k=2$ だがさっきのとは違う)

$\lambda \mid l$. $\bar{\rho}_\lambda$

$\chi_{p'}$
mod l する前は
位数 $p'-1$

$0 \to \bar{\chi}_{p'}^{k-1} \to \bar{\rho}_\lambda \to 1 \to 0 \mod l$

$\wr\wr$

$\bar{\chi}_{p'}^{k'-1}$

今後の予定

- とりあえず来週休み

  12/21, 1/8, … 2/1.

- MLT $R=T \Rightarrow$ MLT.

  枠つき

- LT potential modularity (Taylor)

  $\Downarrow$ R=T, Böckle

  lifting thm (ℓ-adic)

  Brauer induction.

  $\Downarrow$

  " (system)

$\bar\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{F})$ Serre level N, wt 2.

level lowering f eigenform level M, wt 2

$\bar\rho = \bar\rho_{f,\lambda}$ とする $N \mid M$

$\Rightarrow \exists g$ eigenform level N, wt s.t. $\bar\rho = \bar\rho_{g,\lambda}$

LT (crys) より (ρ_λ) level N, wt 2

level N の def の話.

MLT ($k=2$) より ρ_λ modular $\rho_\lambda = \rho_{f,\lambda}$.

$/\mathbb{Q}$ $\Uparrow$ level M の $R=T$

$\Uparrow$ $\uparrow$

$/F$ ← Skinner-Wiles base change minimal でない.