$\mathcal{O}_\lambda \to \mathbb{F}' \leftarrow \mathbb{F}$ s.t. $\rho_{f,\lambda} \otimes \mathbb{F}' \cong \bar{\rho} \otimes \mathbb{F}'$

qualitative.

11/16 補足 1. global local compatibility

f: normalized eigen new form

$\updownarrow$

π_f : $GL_2(\mathbb{A}_f)$ の irred. automorphic rep'n

$= \bigotimes \pi_{f,p} \quad \prod' GL_2(\mathbb{Q}_p)$

$\pi_{f,p}$ $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ の irred. ~~auto~~. rep'n admissible.

$E = \mathbb{Q}(f)$ $(\rho_{f,\lambda})$ $G_\mathbb{Q}$ の 2次元 l-adic rep'n

λ, E の finite place

$WD(\rho_{f,\lambda}|_{G_{\mathbb{Q}_p}})$ $WD_{\mathbb{Q}_p}$ の2次元表現

E_λ 上 def'd.

$\pi_{f,p}$ $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ の rep'n $\longleftrightarrow$ $WD(\rho_{f,\lambda}|_{G_{\mathbb{Q}_p}})^{F\text{-s.s}}$

E上定義される local Langlands (Carayol) $WD_{\mathbb{Q}_p}$ の rep'n.

2. G locally cpt $\supset K$ open cpt $T(K)$

Hecke 環

(G の adm rep'n / $\mathbb{C}$) ($T(K)$-mod, $\mathbb{C}$ 上有限次元)

$$V \longmapsto V^K = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}[G/K], V)$$

$T(K)$-mod

$$\mathbb{C}[G/K] \otimes_{T(K)} M \longleftarrow M$$

$\simeq id$

?

3. $\mathbb{Q}$ のかわりに総実代数体 F.

elliptic modular ⟶ Hilbert modular

ふつうの

- Serre 予想. $l = \mathrm{char}\,\mathbb{F}$ odd.

$\mathbb{F}$: 有限体, $\bar\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{F})$ 絶対既約連続表現

$\Rightarrow \exists N, k, \varepsilon, f \quad \mathcal{O}_{E\lambda} \to \mathbb{F}' \supset \mathbb{F}$

s.t. $\rho_{f\lambda} \otimes_{\mathcal{O}_{E\lambda}} \mathbb{F}' \simeq \bar\rho \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}'$

N, ε l とは異なる p に対する $\bar\rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ で定まる.

k $l = p$ の $\bar\rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ で定まる.

k mod $p-1$ は $\det \bar\rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ 〃 $(l = p)$

N : $\bar\rho$ の Artin conductor

$$N = \prod_{p \neq \ell} p^{f_p(\bar\rho)}$$

$\parallel$

$N(\bar\rho)$ $\quad f_p(\bar\rho)$ $\quad \bar\rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ の Artin conductor (の exponent)

$$= \underbrace{\dim V}_{\substack{\parallel \\ 2}} - \dim V^{I_p} + \underbrace{\mathrm{Sw}_p V}_{\substack{\vee\!\parallel \\ 0}} \qquad I_p \subset G_{\mathbb{Q}_p} \text{ inertia}$$

$=0 \iff P_p$ が trivial に作用.

$f_p(\rho_{E,\lambda})$ を同じ式で定義

$\parallel$ $\qquad$ 大きくなるかも $\qquad$ $\parallel$ $\leftarrow$ P_p への制限で定まり, $p \neq \ell$

$$f_p(\rho_{E,\lambda}) \geq f_p(\bar\rho)$$

例 $E = E_{a,b,c}$ Frey curve $c^\ell = a^\ell + b^\ell$

$p \neq 2, \ell$ $\quad E$ は p で semi-stable red.

$$\Rightarrow f_p(T_\ell(E)) = \begin{cases} 0 & \text{good} \\ 1 & \text{mult.} \end{cases}$$

$E[p]$ は $G_{\mathbb{Q}_p}$ の作用は multiplicative red.

であっても 不分岐.

$\begin{pmatrix} 1 & \ell\text{で割れる} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ minimal model の closed fiber の cpt の数が ℓ で割れる.

$N(\bar\rho) = 1$ or 2.

$$\varepsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \mathbb{F}^\times$$

$$\rotatebox{90}{=}$$

$$\prod_{p \neq l} (\mathbb{Z}/p^{f_p(\bar\rho)}\mathbb{Z})^\times$$

$f(\bar\rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}}) \geq f(\det\bar\rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}})$

$$\begin{array}{ccc} \det\bar\rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}} : G_{\mathbb{Q}_p}^{ab} & \longrightarrow & \mathbb{F}^\times \\ \uparrow \text{rec.} & & \uparrow \\ \mathbb{Q}_p^\times & & \\ \cup & & \\ \mathbb{Z}_p^\times & \twoheadrightarrow & (\mathbb{Z}_p/p^{f_p(\bar\rho)}\mathbb{Z}_p)^\times \end{array}$$

(ここまで：Galois表現の構成 … geom. coh geom Frob

これから ―――― を調べる … 数論 coh arith ..

$\det\bar\rho|_{G_{\mathbb{Q}_l}} = \cancel{\quad}\ \mathrm{cyclo}_l^{k-1}$ ← 法 l 円分指標　位数 $l-1$.

$k-1 \bmod l$ はこれできまる.

$l = p$　$(\rho_{f,\lambda}|_{G_{\mathbb{Q}_p}}) \otimes_{E_\lambda} \mathbb{C}_p \simeq \mathbb{C}_p \oplus \mathbb{C}_p(1-k)$

mod p 表現だけでも $k-1 < p-1$ なら $k-1$ は

決定できる.（torsion 係数の p 進 Hodge

Fontaine - Lafaille)

$\ell = p$

$k = k(\bar\rho)$ の定義

$\bar\rho|_{I_p}$ $\quad \overset{I}{\overset{\shortparallel}{I_p}} \supset \overset{P}{\overset{\shortparallel}{P_p}}$

$$I/P \simeq \hat{\mathbb{Z}}'(1) = \varprojlim_{p \nmid n} \mu_n$$

I/P の $\mathbb{F}$ 値指標の分類

$h \geq 1$, $\psi_h : I/P \twoheadrightarrow \mu_{p^h - 1} = (\mathbb{F}_{p^h})^\times$ を level h の fundamental char

$(\hat{\mathbb{F}}^\times)$

$i : \mathbb{Z}/h\mathbb{Z} \to \{0, \dots, p-1\} \subset \mathbb{Z}$ $\quad$ $\mathbb{Z}/h'\mathbb{Z}$ $\quad$ i : primitive

$i = (i_0, \dots, i_{h-1})$ $\quad$ $h' | h \Rightarrow h' = h$

$\psi_h^i = \psi_h^{i_0 + i_1 p + \dots + i_{h-1} p^{h-1}}$ $\quad$ $0 \leq * \leq p^h - 1$

$\psi_{h'} = \psi_h^{\frac{p^h - 1}{p^{h'} - 1}} = \psi_h^{1 + p^{h'} + \cdots}$

$(\psi_h^i)^p = \psi_h^{i_0 p + \cdots}$ $\quad$ 共役 = 番号をずらす.

I/P の指標 / G/I による共役 $= \coprod_h \{\text{primitive} : \mathbb{Z}/h\mathbb{Z} \to \{0, \dots, p-1\}\}$ / ずらし

p群の標数 p の有限次元な半単純表現は自明.

$GL_n(\mathbb{F})$ の p-Sylow 群は $\left\{\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\right\}$ と共役.

$\bar{\rho}|_I$ Iの2次元 $\mathbb{F}$ 表現

$\mathbb{F}$ 必要に応じて拡大.

$\bar{\rho}$ の半単純化をとってくる指標の level

・level 2 $\psi \oplus \bar{\psi}$ $h=2$ $i=(i_0, i_1)$

$i_0 \neq i_1$, $\underset{i_0}{\overset{a}{\shortparallel}} < \underset{i_1}{\overset{b}{\shortparallel}}$

・level 1 $\psi \oplus \psi'$ $h=1$ χ = cyclo

$\chi^a \oplus \chi^b$ $0 \leq a, b \leq p-1$

・

この非自明な拡大.

Serre $G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\bar{\mathbb{F}}_p)$

Propriétés galoisiennes

$2 \leq k(\bar{\rho}) \leq p^2-1$ $(p \neq 2)$. $2, 4$ $(p=2)$.

wt k a と の geom 構成

$H^1(X_1(N), j_* \mathrm{Sym}^{k-2} R^1 a_* \mathbb{Q}_\ell)$ $a: E_{Y_1(N)} \to Y_1(N)$

H^q $q < p-1$ (torsion 係数の p進 Hodge 論)

$\overset{\shortparallel}{k-1}$ うまくいくはない

X が mod p で good repd $(p \nmid N)$.

$k(\bar{\rho}) = k < p$ となるような $\bar{\rho}$ は

<u>torsion 係数の p進 Hodge (F-L) で扱えるもの</u>

でなくてはならない。

V p-adic rep'n $H^q(X)$ X good, $q < p-1$

V_f $D = D_{dR}(V)$ filtered $\mathbb{Q}_p$-vect space

dim $= 2$ $\quad Gr^i D \neq 0 \quad (i = 0, k-1)$

$V \supset T$ lattice $\quad \bar{V} = T \otimes \mathbb{F}. \quad \bar{D} = M.$

admissible filtered φ-module $\quad k$: char p の完全体.

M: 有限次元 k-v.sp.

$M^i \subset M$ finite decreasing fil.

$a \leq b \quad M^a = M, \ M^{b+1} = 0.$

$\varphi_i : M^i \to M$ Frobenius linear

$\varphi_i|_{M^{i+1}} = 0.$

$M = \sum \varphi_i(M^i)$

$k=\bar{k}$ のときの Simple object の分類

$h \geq 1$ $i: \mathbb{Z}/h\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ primitive

$$M = M(h,i) = \bigoplus_{m=0}^{h-1} k e_m$$

$$M^i = \langle e_m : i_m \geq i \rangle \quad \varphi^i(e_m) = e_{m+1}$$

(adm fil φ-mod) $\to$ (cristalline G_{K_0}-rep'n)

$$\begin{array}{ccc} \overset{\Psi}{M} & \longmapsto & V(\overset{\Psi}{M}) \\ M(h,i) & \longmapsto & \psi_h^i \end{array}$$

$K_0 = \mathrm{Frac}\,W(k)$

$k=\bar{k}$

$V(M(h,i)) \subset (\bar{\rho}_{f,\lambda}|_{I_p})^{s.s}$ となるとすると

$i_* = 0, k-1$, $h=1,2$.

$k(\bar{\rho}) < p$ となるためには $a=0<b=k-1$ でなくてはいけない.

$k = k(\bar{\rho})$

上の2つの場合.