11/2. ・構成の残り

・$GL_2(\mathbb{A}_f)$の表現

・ℓLL

(レポート 2まとうにうめる)

$N \geq 5$. $Y_1(N)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \subset X_1(N)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} / \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ proper smooth

$H^1(X_1(N)(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ $T_2(N)_{\mathbb{Q}}$-module 自由, rk 2.

$$H^1(X_1(N)(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_\ell = \mathrm{Hom}(\varprojlim J_1(N)(\bar{\mathbb{Q}})[\ell^n], \mathbb{Q}_\ell)$$

$T_2(N)_{\mathbb{Q}_\ell}$-module free, rk 2　$G_{\mathbb{Q}}$のℓ進表現　$J_1(N) = \mathrm{Jac}\, X_1(N)$

$\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$上 abel. sch

$f : T_2(N)_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}(f) = E$　normalized eigen form が定める環の準同形

λ : Eの有限素点. $T_2(N)_{\mathbb{Q}_\ell} \to E_\lambda$

p 素数 ($p \nmid N$ の場合)

$$\begin{array}{ccc} & X_1(N,p) & \\ {\scriptstyle s}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle t} \\ X_1(N) & & X_1(N) \end{array} \Big/ \mathbb{C} \qquad \begin{array}{ccc} & \Gamma_1(N)\cap\Gamma_1(p)\backslash H & \tau \mapsto p\tau \\ {\scriptstyle can}\swarrow & & \searrow \\ \Gamma_1(N)\backslash H & & \Gamma_1(N)\backslash H \end{array}$$

$T_p = s_* \circ t^*$

$(E, P) \leftarrow (E, P, C) \rightarrow (E/C, P\text{の像})$

C: 位数pの巡回部分群

E: ell curve

P: 位数ちょうどN

$$\begin{array}{ccc} & X_1(N,p)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} & \\ \swarrow & & \searrow \\ X_1(N)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} & & X_1(N)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \end{array} \Big/ \mathbb{Z}[\tfrac{1}{N}]$$

$E \to E/C$ deg p の isogeny のmoduli.

$Y_1(N,p)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]}$ の moduli 解釈

$\mathbb{Z}[\frac{1}{Np}]$ 上では $\mathbb{C}$ 上と同様に

位数 p の巡回部分群 = étale local に $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ と同形

p のところは Drinfeld の意味（詳細は省略）

$E \to E'$ degree p の isogeny

と考えればよい。

$T_p = s_* \circ t^*$ として T_0 辺に T_p の作用を定義する。

$G_{\mathbb{Q}}$ の表現 T_0 辺の $T_2(N)_{\mathbb{Q}_\ell}$ - 加群構造と compatible.

$H^1(X_1(N)_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ $G_{\mathbb{Q}}$-$T_2(N)_{\mathbb{Q}_\ell}$ - 加群.

T_0 辺

$V_\lambda = H^1(X_1(N)_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{T_2(N)_{\mathbb{Q}_\ell}} E_\lambda$ $G_{\mathbb{Q}}$ の 2次元 E_λ 表現

V_λ は $p \nmid N\ell$ で不分岐 ($p=\ell$ でも $p \nmid N$ なら crystalline)

$$\det(1 - Fr_p t ; V_\lambda) = 1 - a_p(f)t + \varepsilon(p)pt^2$$

を示すには

$$\det(1 - Fr_p t ; H^1(X_1(N)_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)) = 1 - T_p t + \langle p \rangle p t^2$$

を示す

$T_2(N)_{\mathbb{Q}_\ell}$ - 加群としての det.

$$X_1(N,p)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \otimes_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \mathbb{F}_p \hookrightarrow X_1(N)_{\mathbb{F}_p} \times X_1(N)_{\mathbb{F}_p}$$

(s,t)

$$X_1(N)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \otimes_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \mathbb{F}_p$$

合同関係式 $=$

$$\Gamma_{\mathrm{Frp}} \cup {}^{t}\Gamma_{\langle p\rangle \circ \mathrm{Frp}}$$

$$f \longmapsto V_\lambda$$

N, k, ε

(1) $p \nmid N\ell$ で不分岐.

(2) $\det^{-1} = \varepsilon \cdot \mathrm{cyclo}_\ell^{k-1}$

$$\varepsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to E^\times$$

$$G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})$$

$$G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{\ell^\infty})/\mathbb{Q})$$

$$\mathbb{Z}_\ell^\times = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_\ell(1))$$

$$\mathbb{Z}_\ell(1) = \varprojlim_n \mu_{\ell^n}$$

(3) $V_\lambda|G_{\mathbb{Q}_p}$ は potentially ~~crystalline~~ semi-stable.

$(\lambda | p)$ $p=\ell$.

で $V_\lambda \otimes_{E_\lambda} \mathbb{C}_p \cong \mathbb{C}_p \oplus \mathbb{C}_p(-(k-1))$

$G_{\mathbb{Q}_p}$ 表現

$\mathbb{C}_p = \hat{E}_\lambda$

(2) $\Rightarrow$ (2') $\det(\text{complex conj.}) = -1$

$\Updownarrow$ $\varepsilon(-1) = (-1)^k$ $\quad \gamma_k^* f = \varepsilon(\gamma) f$

$\Gamma_0(N) \ni \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad f = \varepsilon(-1)(-1)^k f \quad (-1)^k f = \varepsilon(-1) f$

$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(E_\lambda)$　2次元ℓ進表現 V_λ

(1) 有限個の素点 Σ のぞいて ~~$p \nmid N\ell$~~ で不分岐

(2′) odd

(3) $\lambda | \ell = p$ とすると $\rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ は p.st で

$$V_\lambda \otimes_{E_\lambda} \mathbb{C}_p = \mathbb{C}_p \oplus \mathbb{C}_p(1-k) \quad (k \geq 2)$$

とする．$\det^{-1} = \varepsilon \cdot \mathrm{cyclo}_\ell^{k-1}$ で $\varepsilon : G_{\mathbb{Q}} \to E_\lambda^\times$ を定め

$N \geq 1$, V_λ（が定める W.D 群の表現）の conductor

とおくと，level N, wt k, char ε の normalized eigen cusp form f と $\mathbb{Q}(f) \hookrightarrow E_\lambda$（体の準同形）

が存在して，ρ は $\rho_{f,\lambda}$ と同形であろう．

（Fontaine–Mazur 予想）

- N　conductor　Galois 表現の分岐
- k　Hodge fil をみている．　∞　$GL_2(\mathbb{R})$ の表現

  $\uparrow$ de Rham realization からくる．　$\updownarrow$ $W(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ の2次元表現 $\cup$ rk 2 の pure $\mathbb{R}$-Hodge str.
- ε　det でわかる．

ℓ-adic の場合．

mod ℓ．修正が必要．

$f \mapsto (N_\lambda)_\lambda$; Eの有限素点.

$\uparrow$

strict compatible system.

- WDの表現のcompatibilityの定義の訂正（1回目）

$(\rho_\lambda, N_\lambda)$ $\quad$ $(\rho_{\lambda'}, N_{\lambda'})$

$\uparrow$ $\quad$ $\uparrow$

E_λ $\quad$ $E_{\lambda'}$

$\rho_\lambda, \rho_{\lambda'}$ ~~E上定義され E上有理的で E上同形~~

E上定義され，E上同形.

(ρ_λ) FM予想の (1), (2'), (3) をみたす compatible system とすると，(ρ_λ) は保形形式から来る.

Serre予想の帰結

- $GL_2(\mathbb{A}_f)$ の表現 $\quad \mathbb{A}_f = \hat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$

$$S_k(\Gamma) \subset \Gamma(H, \omega^{\otimes k})^\Gamma, \quad \Gamma = \Gamma_1(N), N \geq 1.$$

$$\Gamma \backslash H = H/{}^t\Gamma - H^{\pm} \times P_N / GL_2(\mathbb{Z})$$

$$= \mathbb{C}^\times \backslash \tilde{R}^{\pm} \times P_N / GL_2(\mathbb{Z})$$

$\tilde{R}^{\pm} = \mathrm{Isom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ $\quad GL_2(\mathbb{R})$-torsor.

${}^t\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{Z}^2/N\mathbb{Z}^2$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \Psi$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の stabilizer

$$K \subset GL_2(\hat{\mathbb{Z}}) \curvearrowright \mathbb{Z}^2/N\mathbb{Z}^2 = \hat{\mathbb{Z}}^2/N\hat{\mathbb{Z}}^2$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の stabilizer

$$\Gamma\backslash H^* = \left(\mathbb{C}^\times\backslash \tilde{\mathbb{R}}^+ \times K\backslash GL_2(\mathbb{A}_f)\right)/GL_2(\mathbb{Q}).$$

K: $GL_2(\mathbb{A}_f)$ の open cpt subgp

$P_N \subset \mathbb{Z}^2/N\mathbb{Z}^2$ 位数ちょうど N

$$P_N = {}^t\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z}) = {}^t\Gamma^\pm\backslash GL_2(\mathbb{Z}) \subset K\backslash GL_2(\mathbb{A}_f)$$

$\mathbb{Q}$ の類数 $=1 \Rightarrow *$.

$$= K_\infty K_f\backslash GL_2(\mathbb{A})/GL_2(\mathbb{Q}) \qquad \mathbb{A} = \mathbb{A}_f \times \mathbb{R}.$$

$$S_k(\Gamma) \subset \Gamma(H, \omega^{\otimes k})^\Gamma = \Gamma(\tilde{\mathbb{R}}^\pm \times GL_2(\mathbb{A}_f), \omega^{\otimes k})^{\mathbb{C}^\times \times K \times GL_2(\mathbb{Q})}$$

$\subset$: cuspでの条件.

$$\mathcal{A}^0(k) \subset \underbrace{\bigcup_{\substack{K \subset GL_2(\mathbb{A}_f) \\ \text{open cpt subgp}}} \Gamma(\tilde{\mathbb{R}}^\pm \times GL_2(\mathbb{A}_f)/GL_2(\mathbb{Q}), \omega^{\otimes k})^{\mathbb{C}^\times}}_{GL_2(\mathbb{A}_f)\text{の表現}}$$

$\subset$: cuspでの条件

$\mathcal{A}^0(k)$: 重さ k の正則cusp形式の空間.

$K \hookrightarrow \Gamma \quad \mathcal{a}^0(k)^K = S_k(\Gamma)$.

他の定式化 $\quad C^\infty(\tilde{\mathbb{R}}^{\pm} \times GL_2(\mathbb{A}_f))$

D_{k-1} : $\underbrace{GL_2(\mathbb{R})}_{\shortparallel}$ の重さ k の正則 discrete series 表現

ψ

e_k Harish-Chandra 加群

$(\mathfrak{g}, K)$ - 加群

$\uparrow$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Lie}(GL_2(\mathbb{R}))$

$K = \mathbb{C}^\times$ の normalizer $\subset GL_2(\mathbb{C}) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \overset{=}{} GL_2(\mathbb{R})$

$$\Gamma(\tilde{\mathbb{R}}^{\pm} \times GL_2(\mathbb{A}_f), \omega^{\otimes k}) = \mathrm{Hom}_{GL_2(\mathbb{R})}(D_{k-1}, C^\infty(\tilde{\mathbb{R}}^{\pm} \times GL_2(\mathbb{R})))$$

algebraic

$$D_{k-1} \otimes \mathcal{a}^0(k) \hookrightarrow C^\infty(\tilde{\mathbb{R}}^{\pm} \times GL_2(\mathbb{A}_f))^{\mathbb{C}^\times \times GL_2(\mathbb{Q})}$$

$GL_2(\mathbb{A}) = GL_2(\mathbb{R}) \times GL_2(\mathbb{A}_f)$ の表現.

admissible K-finite vector $\overset{\text{v.s.}}{—}$ L^2 空間 unitary 表現