

10/26

• / (1) Eichler 志村同形, Jacobian
Hecke 作用素

• / (2) moduli 解释, 构成, 合同同像孔

• $GL_2(\mathbb{A}_F)$ の表現, local Langlands & a
compatibility

• $\Gamma = \Gamma_1(N)$ $S_k(\Gamma) \subset \Gamma(H, \omega^{\otimes k})$ Γ 不変部分

\uparrow \uparrow \uparrow
 cusp form 空间 \uparrow cusp 条件 \uparrow global section

• 同形の解释 $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$ 指数有限

$\Gamma = \Gamma_1(N)$ $Y_1(N) = \Gamma \backslash H = Y_\Gamma$ Riemann 面 $\subset X_1(N)$ $Y_1(N)$ の smooth pt 是

\downarrow 有限被覆 \downarrow \downarrow 有限被覆

$Y_1(1) = SL_2(\mathbb{Z}) \backslash H \cong \mathbb{A}_\mathbb{C}^1 (= \mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^1$ modular curve

$G_{2k}(\tau) = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \neq 0} \frac{1}{(n+mt\tau)^{2k}}$ ($k \geq 2$) Eisenstein series

$g_2 = 60G_4, g_3 = 140G_6$ τ の函数

$$j(\tau) = \frac{12^3 g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}$$

$k=2$. H is a line bundle $\omega^{\otimes 2} \cong \Omega^1$
 $(dz)^{\otimes 2} \mapsto dz$
 $SL_2(\mathbb{Z})$ -equivariant.

$N \geq 5$

$$S_2(\Gamma) \subset (H, \omega^{\otimes 2})^\Gamma$$

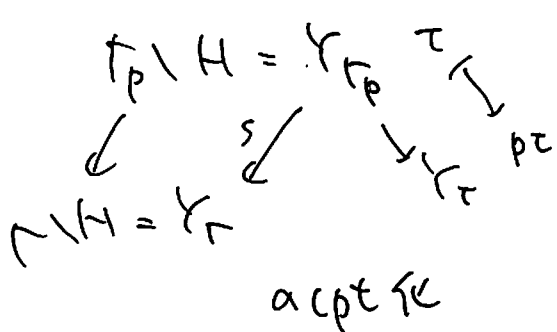
$\parallel \qquad \parallel$

$$\Gamma(X_1(N), \Omega^1) \subset \Gamma(Y_1(N), \Omega^{1,an})$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{cot}} \quad \uparrow$
 有限次元

Hecke operator $p \nmid N$ 素数

$\Gamma = \Gamma_1(N)$ $N \geq 5$ $\Gamma_p = \Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(p) \subset \Gamma$
 \uparrow
 有限次 $p+1$



$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_p$
 $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & pb \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\uparrow \qquad \uparrow$
 $\Gamma_p \qquad \Gamma_1(N)$
 $\frac{pc+0}{0+1} = pc$

$$T_p : S_2(\Gamma) \longrightarrow S_2(\Gamma) \quad \text{//}$$

$$\Gamma(X_1(N), \Omega^1) \xrightarrow{\tau^*} \Gamma(X_1(N, p), \Omega^1) \xrightarrow{S_2} \Gamma(X_1(N), \Omega^1)$$

$$T_p = S_2 \circ \tau^* : H^1(X_1(N), \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X_1(N), \mathbb{Z})$$

$$T_2(\Gamma)_{\mathbb{Z}} \subset \text{End}(H^1(X_1(N), \mathbb{Z}))$$

\uparrow
 $T_n, n \geq 1, \langle d \rangle (d, N) = 1$ \mathbb{Z}^n 生成元の
 部分環

\mathbb{Z} 上有限次元環

$$H^1(X_1(N), \mathbb{Z}) : T_2(\Gamma)_{\mathbb{Z}} \text{- 加群}$$

• Eichler 志村 同形 $S_2(\Gamma)$ 複素構造
に一致した

$$H^1(X_1(N), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} \cong \Gamma(X_1(N), \Omega^1) \oplus \Gamma(X_1(N), \Omega^1)$$

(Hodge 分解)

Hodge 作用素の作用と compatible

$$T_2(\Gamma)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} \cong T_2(\Gamma)_{\mathbb{C}} \subset \text{End}(S_2(\Gamma)) \mathbb{Z}$$

Hodge 分解は $T_2(\Gamma)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} -$ 加群としての同形,
 Eichler 志村 同形,

$$T_2(\Gamma) \times S_2(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{非自同态}$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$(T, f) \quad \mapsto \quad a_1(T, f)$$

$S_2(\Gamma)^*$ 自由 $T_2(\Gamma)$ -加群. 階數 1

Poincaré duality + E-S 同形, + fpqc descent

$$\Rightarrow H^1(X_1(N), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \text{ 是}$$

自由 $T_2(\Gamma)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$ 加群. 階數 2

f normalized eigen form

$$f: T_2(\Gamma)_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{環的準同形}$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{Q} \text{ 上} \\ \text{finite} \end{array} \rightarrow T_2(\Gamma)_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}(f) \leftarrow \mathbb{Q} \text{ 的有限次拡大.}$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{Z} \text{ 上} \\ \text{finite} \end{array} \rightarrow T_2(\Gamma)_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\quad} a_n(f) \leftarrow \text{代数的整数.}$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$T_n \quad \quad \quad T_n$$

$$E = \mathbb{Q}(f), \quad \lambda: E \text{ 的有限素点}$$

$$H^1(X_1(N), \mathbb{Z}) \otimes E \leftarrow \text{2次元的 } E \text{ 線形空間.}$$

$$T_2(\Gamma)_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{f \text{ 固定}} \text{環的準同形}$$

X compact Riemann surface. genus g
 $Jac(X) = \Gamma(X, \Omega^1)^* / \text{Im } H^1(X, \mathbb{Z})$
 \uparrow \uparrow
 g 次元 \mathbb{C} -vec. space of actual free \mathbb{Z} -mod
 \mathbb{C} 線形空間 \mathbb{C} 係数 $2g$ 自由 \mathbb{Z} -mod.

lattice.

Compact $2g$ torus \mathbb{C} on Abelian variety.

$$[\omega] \in H^1(X, \mathbb{Z})^* = H_1(X, \mathbb{Z})$$

(\pm 線形形式 $\omega \mapsto \int_{\gamma} \omega \in \mathbb{Z}$)

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} := \text{Hom}_{\mathbb{Z}} \left(\varprojlim_n \text{Jac } X[\ell^n], \mathbb{Q} \right)$$

Galois 作用 $\in \text{Jac}(X, \Gamma) \cong \mathbb{Q}$ on \mathbb{Z} 作用 $\in \mathbb{Z}$ 定義

$$\in X_1(\Gamma) \cong \mathbb{Z}$$

\in moduli 解釋.

$$\Gamma \text{ on } H \text{ 作用 } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

$$\Gamma \text{ on } H \text{ 作用 } \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

Reference Deligne Formes modulaires et
repres de $GL(2)$

Spr. LNM 349 p55-105.

$$\Gamma \backslash H = Y_1(N) = H/\Gamma$$

$P_N \subset \mathbb{Z}^2/N\mathbb{Z}^2$ の位数 N の元全体の集合

P_N $GL_2(\mathbb{Z})$ の自然な左作用 $GL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$

\mathbb{Z} 上の L_2 作用

$inv \mathbb{Z}$ の作用. $SL_2(\mathbb{Z})$ に制限.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の stabilizer Γ $P_N \hookrightarrow \Gamma \backslash SL_2(\mathbb{Z})$
同視.

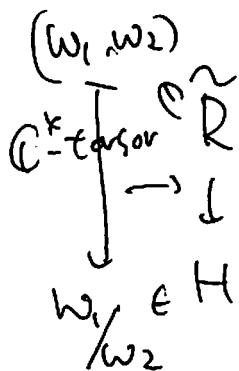
$$\Gamma \backslash H = (H \times P_N) / SL_2(\mathbb{Z})$$

$$\tilde{R}^{\pm} = \{ \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C} \text{ lattice} \} = \{ (\omega_1, \omega_2) \in (\mathbb{C}^{\times})^2 \mid \frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{R} \}$$

$GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ の自然な作用 \cup

$\cup \mathbb{C}^{\times} GL_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ -torsor $\{ \mid \text{Im} \frac{\omega_1}{\omega_2} > 0 \}$

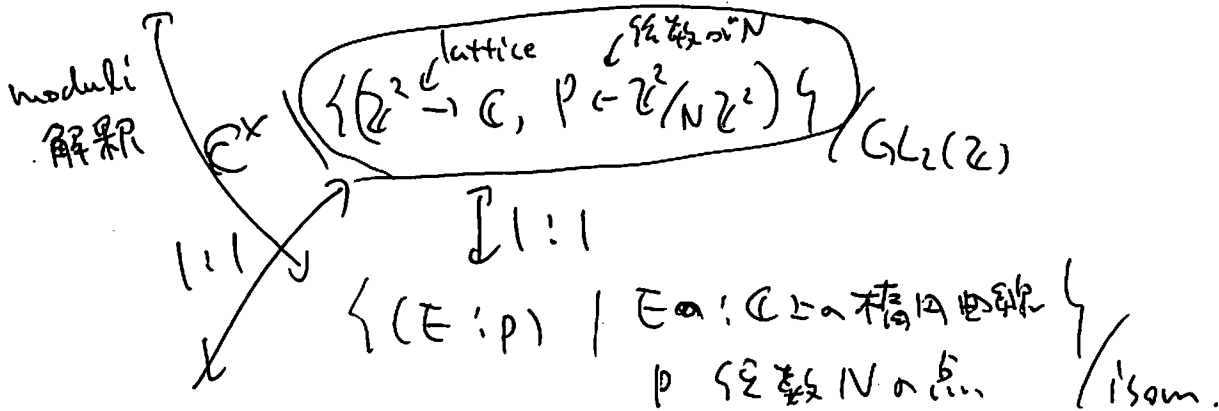
$\cong GL_2(\mathbb{R})$



$SL_2(\mathbb{Z})$ の \tilde{R}^{\pm} 上の作用 compatible.
 $GL_2(\mathbb{Z})$ の自然な作用.
 $(\omega_1, \omega_2) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = (a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2)$

$$\Gamma \backslash H = (\mathbb{C}^{\times} \backslash \tilde{R}^{\pm} \times P_N) / GL_2(\mathbb{Z})$$

$$\mathcal{M} = (\mathbb{C}^* \backslash \tilde{\mathcal{R}}^+ \times \mathbb{P}^1) / GL_2(\mathbb{Z})$$



$$\left\{ (E, p, \text{Lie } E \simeq \mathbb{C}, H_1(E, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^2) \right\} / \text{isom}$$

Lie E E の原点 z の接空間, 2次元 \mathbb{C} -線形空間

"

$$T(E, \Omega)^*$$

$H_1(E, \mathbb{Z})$ 自由 \mathbb{Z} 加群 $rk = 2$ Lie E $\supset H_1(E, \mathbb{Z})$ (lattice)

$$\exp: \text{Lie } E / H_1(E, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} E$$

\mathcal{S} 複素解析空間 $\{ S \rightarrow Y_1(N), \text{ 複素解析空間の族} \}$

$N \geq 4$

\downarrow
 \mathcal{S} 上の楕円曲線の族 $E \subset E \rightarrow \mathcal{S}$ の切線
 $p \in \mathbb{Z}^2, Np = 0 \mathbb{Z}$ あり, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z} \cap \mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{P}^1 \subset E_s$ の
 位数 $p \in \mathbb{Z}_s$ あり N の分 (E, p) .

/ isom

$N \geq 4$. $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ is a function

$M_1(N): (\text{Sch} / \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]) \rightarrow (\text{Sets})$ is a

$S \mapsto M_1(N)(S)$

$M_1(N)(S) = \left\{ \begin{array}{l} S \text{ 上の楕円曲線 } E \in E \rightarrow S \text{ の切線 } P: S \rightarrow E \text{ について} \\ NP=0 \text{ かつ } P \text{ は } S \text{ の } N \text{ 個の点 } \bar{s} \rightarrow S \text{ に対して} \\ P_{\bar{s}} \in E(\bar{s}) \text{ の位数が } \bar{s} \text{ について } N \text{ であるものの} \\ \text{全体 } (E, P) \end{array} \right.$

(Som)

$\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ 上

$\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ 上 an affine smooth curve $Y_1(N)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]}$

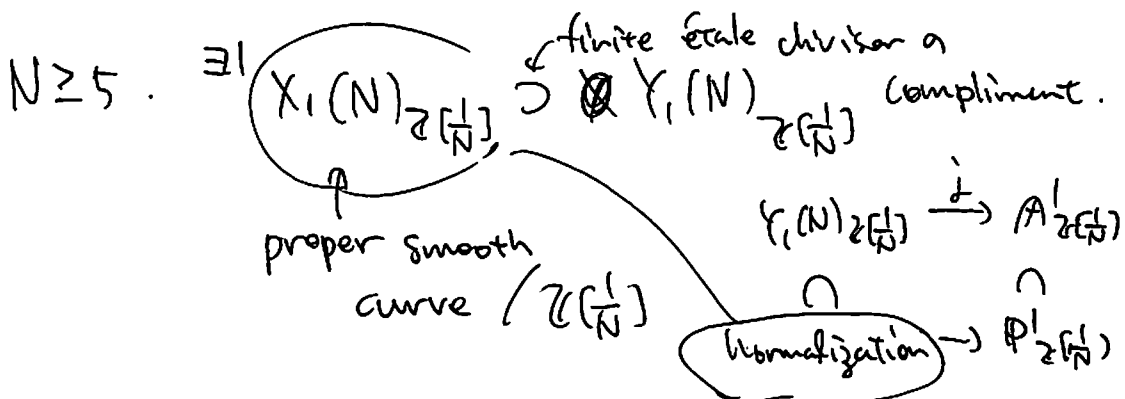
$M_1(N)$ is represented by

$N=4$ is directly constructed

$N=3$ $M_1(N)$ is represented by $Y_1(N)$ is not constructed

直接

is constructed by (2)
 . 被覆
 . 12 個の点
 . 高
 一般に構成



S scheme . $X \rightarrow S$ proper smooth curve
 \downarrow
 S
 section
 geom. fiber \mathbb{Z} 道系
 genus $g \geq 0$

T/S sch

$$\text{Pic}_{X/S}^0(T) = \ker (s^* \otimes \text{deg} ; \text{Pic}(X \times_S T) \rightarrow \text{Pic}(T) \oplus \mathbb{Z}^g)$$

\uparrow
 飞区局配定系数
 函数

$\text{Pic}(-1) = -$ 上可逆层的同形类群.

$\text{Pic}_{X/S}^0 \neq S$ is an Abelian scheme 2-表现可能

$\text{Jac}_{X/S}$

Busch-Lütkebohmert-Raynaud

Néron model.

$$H^1(X_1(N)_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$$

$$J_1(N) = \text{Jac}_{X_1(N)_{\mathbb{Q}}}$$

$$= \text{Hom} \left(\lim_{\leftarrow} \text{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}) \left(\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}} \right), \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}} \right)$$

\mathbb{Q} 上 Abelian 多元素 (群)

$\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ 上 Abelian. si

$\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$

$J_1(N)_{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]}$ 的几何

$P \times \mathbb{N} \mathbb{Z}$ 2-不可约

\mathbb{Q} E_2 系数, E_2 -系数 of 2次元 1-表现
 $T_2(\Gamma)_{\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}} \rightarrow F$