1/25. Lifting theorem

$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{F})$ 連続表現 $\mathbb{F}$ 有限体 $ch = \ell$

odd, $\bar{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}(\zeta_\ell)}}$: abs irred

(level N, wt k)

$\Rightarrow \exists \rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathcal{O}_\lambda)$ s.t. $\mathcal{O}_\lambda \subset E_\lambda$ 整数環

E_λ: $\mathbb{Q}_\ell$ の有限次拡大

$$
\begin{tikzcd}
G_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\rho"] \arrow[ddr, "\rho \bmod \lambda = \bar{\rho}"'] & GL_2(\mathcal{O}_\lambda) \arrow[d] \\
 & GL_2(\mathcal{O}_\lambda/m_\lambda) \\
 & GL_2(\mathbb{F}) \arrow[u, phantom, "\cup"]
\end{tikzcd}
$$

有限次拡大

(level N, wt k).

Serre 予想

$\bar{\rho}$: modular

$f \to (\rho_{f,\lambda})$ comp. system

$\to \rho_\lambda$ ℓ-adic rep'n

Taylor の pot. modularity

$\exists F$ 総実 Galois 拡大

$\bar{\rho}|_{G_F}$ modular

$\pi \to (\rho_{\pi,\lambda})$ comp. sys.

$\to \rho_{\pi,\lambda}$ ℓ-adic rep'n

帰り道.

~~もし F が solvable~~ $\mathcal{O}\subset E$ fix. $E/\mathbb{Q}_\ell$ 有限次. 剰余体 $\mathbb{F}$.

$\bar{R}_{\mathbb{Q}}$ 分岐条件と det を指定した $\bar{\rho}$ の普遍変形環

(わくなし)

Lifting theorem $\exists\, \bar{R}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{O}'$ 　 $\mathcal{O}'$ は E の有限次拡大 E' の整数環

$\updownarrow$ 1:1

$\bar{\rho}$ の変形 $V_{\mathcal{O}'}$ の同形類

$\uparrow$

rk 2 自由 $\mathcal{O}'$ 加群, $G_{\mathbb{Q}}$ が作用, …

$\bar{R}_{\mathbb{Q}}$ 完備局所ネーター環, $\mathcal{O}$ 上の環 　 $\boxed{\bar{R}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}} E \neq 0}$

これを示す

1. $\dim \bar{R}_{\mathbb{Q}} \geq 1$.
2. $\bar{R}_{\mathbb{Q}}$ 　 $\mathcal{O}$ 加群として有限生成

2 かつ $\dim \bar{R}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}} E = 0 \Rightarrow \bar{R}_{\mathbb{Q}}$ は有限

1 に反する.

2. pot. mod. + R = T. 　 (de Jong)

$F/\mathbb{Q}$ 総実 　 $\bar{\rho}|_{G_F}$ modular

$\bar{R}_F$ 　 $\bar{\rho}|_{G_F}$ の <u>分岐条件</u> と <u>det</u> を指定した

(わくなし) <u>普遍</u> 変形環

$\bar{R}_{\mathbb{Q}}$ のことひきつぐ 　 $G_{\mathbb{Q}} \supset G_F$

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{Q}} & \supset & G_F \\ \cup & & \cup \\ G_{\mathbb{Q}_p} & \supset & G_{F_v} \end{array}$$

$V_{\bar{R}_{\mathbb{Q}}}$ univ. deformation $G_{\mathbb{Q}}$の表現

$V_{\bar{R}_{\mathbb{Q}}}|_{G_F}$ $\bar{\rho}|_{G_F}$の$\bar{R}_{\mathbb{Q}}$へのdef.

$\bar{R}_F$のuniversality $\Rightarrow$ $\bar{R}_F \to \bar{R}_{\mathbb{Q}}$ 環の準同形

$\bar{\rho}_F$ modular　$\bar{R}_F \to T_F$ 同形 ($R=T$).

$\uparrow$

$\mathcal{O}$加群として有限生成

$\underbrace{\bar{R}_{\mathbb{Q}}}_{\text{完備局所ネーター}}$が$\bar{R}_F$加群として有限生成を示せばよい。

剰余体$\mathbb{F}$.　$\bar{R}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\bar{R}_F} \mathbb{F}$が$\mathbb{F}$上有限次元でいえばよい。

〃 の次元$=0$でいえばよい

A　$\bar{R}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\bar{R}_F} \mathbb{F}$の商環かつ整域 $\Rightarrow$ Aは$\mathbb{F}$の有限次拡大

$\bar{R}_{\mathbb{Q}}$は$\mathcal{O}$上 $\mathrm{Tr}\,\rho^{univ}(\sigma)$ $(\sigma \in G_{\mathbb{Q}})$で位相的に生成。

$$\begin{array}{ccc} \bar{\rho}|_{G_F} : G_F & \to & GL_2(\mathbb{F}) \\ \cap \text{ open} & & \cap \\ \rho_A : G_{\mathbb{Q}} & \to & GL_2(A) \end{array}$$

像有限

任意の$\sigma \in G_A$に対し、$\rho_A(\sigma)$ 位数有限

$\mathrm{Tr}\,\rho_A(\sigma)$は$\mathbb{F}$上代数的.

Aは$\mathbb{F}$上代数的な元有限個で位相的に生成
$\Rightarrow A$は$\mathbb{F}$の有限次拡大.

1. $\dim \bar{R}_{\mathcal{O}} \geq 1$. 今までは $\dim$: $\mathcal{O}$上の次元.
て表していた

今までの記号にあわせると $\dim \bar{R}_{\mathcal{O}} \geq 0$.
(こちらである).

$(\bar{R}_{\mathcal{O}} = \bar{R})$. $\mathcal{O}$じゃなくてもOK.

$$\bar{\Lambda}[[X]] \twoheadrightarrow \bar{R}^{\square} \simeq \bar{R}[[Y]]$$
$$\bar{R}^{\square} \supset \bar{R}$$

$\dim \bar{R}^{\square} = \dim \bar{R} + \#Y$.

0なし

$4\#\Sigma_p - \dim H^0(G_S, \mathrm{ad}\,\bar{\rho})$

$$\dim \bar{\Lambda}[[X]] = 4\#\Sigma_p + [F:\mathbb{Q}] + \dim \mathrm{Sel}_S + \sum_{v \in \Sigma_p} H^0(G_v, \mathrm{ad}\,\bar{\rho}) - \dim H^0(G_S, \mathrm{ad}\,\bar{\rho})$$

$\sum_{v \in \Sigma_p} H^0(G_v, \mathrm{ad}\,\bar{\rho}) - \dim H^0(G_S, \mathrm{ad}\,\bar{\rho})$ $=\dim \mathrm{Sel}_S^*$ ~~(Wilesの公式)~~

$$\bar{\Lambda}[[X]]/J \xrightarrow{\sim} \bar{R}^{\square}$$

$J = \ker$

det の条件だけ残して
分岐条件は忘れたもの.

$$\bar{\Lambda}[[X]]/J\text{の像} \xrightarrow{\sim} \bar{R}^{\square}$$

$\# \mathrm{rel} = \dim J/\mathfrak{m}J$

$\bar{\Lambda}[[X]]$の極大イデアル

示したいこと $\dim \bar{R} \geq 0$.

$$\dim \bar{R}^0 \geq \dim \Gamma[[X]] - \# \mathrm{rel}$$

$$\Leftrightarrow \dim \mathrm{Sel}_S^* \geq \# \mathrm{rel}.$$

$$H^*(G_S, M) = H^*(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{cochain の複体}}}{C(G_S, M)})$$

$$H^*_c(G_S, M) \overset{\text{def}}{=} H^*\Big(C(G_S, M) \to \bigoplus_{v \in \Sigma_p} C(G_v, M)\Big)$$

cochain の複体のなす2重複体にともなうふつうの複体のコホモロジー

$$H^*_c(G_S, M) \to H^*(G_S, M) \to \bigoplus_{v \in \Sigma_p} H^*(G_v, M) \to \cdots$$

長完全列.

$$0 \to \mathrm{Sel}_S \to H^1(G_S, ad^0) \to \bigoplus_{v \in \Sigma_p} H^1(G_v, ad^0) \to H^2_c \to H^2 \to H^2 \to H^3_c \to 0$$

$l \neq 2$.

H^3_c $\updownarrow$ dual.

$H^0(G_S, ad^0(1))^* = 0$. $(\bar{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}(\zeta_l)}}$ abs. irred$)$.

$$\dim H^2_c - \dim \mathrm{Sel}_S = \dim H^2(G_S) - \dim H^1(G_S) + \sum_{v \in \Sigma_p} (\dim H^2(G_v) - \dim H^1(G_v) + \dim H^0(G_v)) + \dim H^0$$

$$0 \Rightarrow \boxed{+\dim H^0} - \sum_{v \in \Sigma_p} \dim H^0(G_v)$$

$$\text{To 証} = \chi(G_S, ad^0) - \sum_{v \in I_p} \chi(G_v, ad^0) \quad p=\ell.$$

$$= -\dim ad^0 + \sum_{v|\infty} \dim (ad^0)^{G_{F_v}} - (-\dim ad^0)$$

Euler 数の公式 $\qquad [F:\mathbb{Q}] \qquad v|p=\ell$ の contribution

$\therefore \dim Sel_{S^*} = \dim H^2_c(G_S, ad^0)$

示したいこと $\dim H^2_c \geq$ $\mathbb{F}$rel.

$L[[X]] \twoheadrightarrow R^{\square} \cong L[[X]]/J.$

(*) $\quad 0 \to J/mJ \to L[[X]]/mJ \to R^{\square} \to 0$ exact.

$1 \to ad \otimes J/mJ \to GL_2(L[[X]]/mJ) \to GL_2(R^{\square}) \to 1$

$\uparrow$ univ. def

G_S

$\rightsquigarrow c \in H^2_{(c)}(G_S, ad^0 \otimes J/mJ) = H^2_c(G_S, ad^0) \otimes J/mJ.$

$\underset{\text{とよぶ}}{c} \qquad \square$ を考える $\qquad$ det を指定

c は $\underbrace{(J/mJ)^*}_{\text{contraction により}} \longrightarrow H^2_c(G_S, ad^0)$ を定める.

これが単射をいえばよい.

$u: J/mJ \to \mathbb{F}$ 線形形式 $\quad \underset{0}{u_*(c)} \in H^2_c$ なら $u=0$ をいいたい.

(*) を u で push すると

$$0 \to F \to \overset{\text{def}}{R_u} \to R^\square \to 0.$$

$u_*(c) = 0$ とする. $H^2(G_S, ad^0)$ の元として 0.

c の定義より

$$\begin{array}{ccc} GL_2(R_u) & \to & GL_2(R^\square) \\ & & \uparrow \text{univ} \\ & & G_S \end{array}$$

det を保つ表現として あがる.

$H^1 \to H^1_{loc} \to H^2_c \to H^2$　　H^2_c の元として 0

⟹ わcがつく.

⟹ $R_u \to R^\square$ section がある.

$L[[X]] \to R^\square$ の定義は 接空間に同形をひきおこすように定義.

⟹ $L[[X]] \to R_u$ は全射でない ⟺ $u=0$ //

Lifting theorem (compatible system)

$\rho_\lambda : G_{\mathbb{Q},S} \to GL_2(\mathcal{O}_\lambda)$　λ-adic rep

総実 Galois拡大 $F/\mathbb{Q}$

$\rho_\lambda|_{G_F}$ modular とする.

⟹ $\exists (\rho_\mu)_\mu$ compatible system で $\rho_\lambda = \rho$ となるものが存在.

Brauer induction　Artin L の関数等式, 解析接続

Taylor・pot. modularity

ℓ進表現の L の 〃 、〃

$F/\mathbb{Q}$ もし solvable だったら、~~……~~ ρ の modularity が

いきなりわかる.

$$\begin{tikzcd}
\rho \arrow[d, dash] & f \\
\rho|_{G_F} \arrow[r, phantom, "\sim"] & \pi \arrow[u, "\text{solvable base change (descent)}"']
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ 不変

G 有限群　1 : G の自明指標　hyperelementary: p群 $\times$ cyclic.

このとき G の部分群の族 H_i, 整数 n_i の族 で（可解群）

$$1 = \sum n_i \, \mathrm{Ind}_{H_i}^{G} 1$$

指標の等式　　誘導表現

Curtis-Reiner Methods of representation theory p.382 Th15.1