10/5 Galois表現の保型性

1994. Wiles – Taylor Fermat LT の証明

志村–谷山, Serre, Sato-Tate, Fontaine-Mazur

Khare Harris 11/21-23

高木レクチャー

$G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の2次元表現の保型性

前回 1996 モジュラー曲線の~~代数~~幾何

今回 保型形式の base change, $R=T$ theorem の改良) – 応用

Talks IHES のサマースクールの報告集の原稿

Galois rep'n & mod form

ρ, $\overline{\rho}$ $G_{\mathbb{Q}}$ の2次元表現

ℓ進表現 法ℓ表現

例 $E/\mathbb{Q}$ 楕円曲線 $T_\ell E = \varprojlim E[\ell^n]$ $E[\ell]$

ρ $\overline{\rho}$

modular form と結びついている

modularity … 類体論の非可換化

Kronecker-Weber の定理

$G_{\mathbb{Q}}$ の1次元指標（$\mathbb{C}^\times$値連続）は

すべて Dirichlet 指標である.

$\pm 1 \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{(\frac{-1}{p})p})/\mathbb{Q}) \leftarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q})$ ⇒ 平方剰余の相互法則

$p \neq 2$ 素数 $\quad \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$

1. Galois表現

$G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ $\mathbb{Q}$の絶対Galois群

p 素数 $G_{\mathbb{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ $\mathbb{Q}_p$の絶対Galois群

$\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ fix $\Rightarrow$ $G_{\mathbb{Q}_p} \to G_{\mathbb{Q}}$

$\overline{\mathbb{Q}}_p = \mathbb{Q}_p\overline{\mathbb{Q}} \Rightarrow$ 単射

$\mathbb{Q}_p \subset \mathbb{Q}_p^{ur} = \mathbb{Q}_p(\zeta_m : p \nmid m) \subset \mathbb{Q}_p^{tr} = \mathbb{Q}_p^{ur}(p^{1/m} : p \nmid m) \subset \overline{\mathbb{Q}}$

最大不分岐拡大　　　　最大馴分岐拡大

$G_{\mathbb{Q}_p} \supset I \supset P \supset 1$

惰性群　　　　暴分岐群

$G_{\mathbb{Q}_p}/I = G_{\mathbb{F}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) \simeq \hat{\mathbb{Z}}$

$\mathrm{Fr}_p \leftarrow\!\shortmid 1$

$(a \mapsto a^{1/p})$

$I/P \simeq \hat{\mathbb{Z}}'(1) = \varprojlim_{p \nmid m} \mu_m$　　Kummer理論

P pro-p群　Iのpro-p Sylow群

S 素数(点)の有限集合

G_S : $G_{\mathbb{Q}}$の商, 任意の$p \notin S$に対し, $I_p \subset G_{\mathbb{Q}_p} \hookrightarrow G_{\mathbb{Q}}$

の像が自明になるような最大の商

$p \notin S$

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{Q}_p} & \longrightarrow & G_{\mathbb{Q}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_{\mathbb{Q}_p}/I & \longrightarrow & G_S \\ \| & & \\ \mathrm{Fr}_p \in G_{\mathbb{F}_p} & & \end{array}$$

の像 up to conj が定まる.

$G_{\mathbb{Q}}$ の ℓ 進表現 $\Longleftrightarrow$ G_S の ℓ 進表現 for some S

E_λ $\mathbb{Q}_\ell$ の有限次拡大 ℓ 素数

$\rho : G_S \to GL_{E_\lambda}(V) \simeq GL_n(E_\lambda)$

連続準同形 V 有限次元 E_λ-v.sp $n = \dim_{E_\lambda} V$

ℓ 進表現

F $\mathbb{F}_\ell$ の有限次拡大

$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_F(V)$ V 有限次元 F-v.sp

連続準同形 法 ℓ 表現

$\rho : G_S \longrightarrow GL_{E_\lambda}(V)$, ℓ 進表現

$p \notin S$ $\det(1 - \rho(\mathrm{Fr}_p)t) \in E_\lambda[t]$

$(p \notin S)$

(weakly) compatible system

整合系.

E: 有限次代数体　λ: Eの有限素点 ごとに定まる

ℓ進表現の系 (ρ_λ)

S: 素点の有限集合

λ: Eの有限素点, $S_\lambda = S \cup \{\ell : \lambda | \ell\}$

$\rho_\lambda : G_{S_\lambda} \to GL_{E_\lambda}(V_\lambda)$　ℓ進表現

(ρ_λ) が weakly compatible とは

$$\forall \lambda, \lambda' \quad \forall p \notin S_\lambda \cup S_{\lambda'} \Rightarrow \det(1 - \rho_\lambda(Fr_p) t)$$
$$= \det(1 - \rho_{\lambda'}(Fr_p) t)$$

$$E_\lambda[t] \supset E[t] \subset E_{\lambda'}[t]$$

Cebotarev 密度定理の帰結　$\rho^{s.s}$ ($=\rho$の半単純化) は

$\mathrm{Tr}\,\rho(Fr_p)$　$p \notin S$ で定まる

Tate予想の一部　"有限体上の proper smooth な代数多様体の etale cohomology の Frobenius 作用は半単純"

compatible system の例

$X_{\mathbb{Q}}$　$\mathbb{Q}$上の proper smooth 代数多様体

$X / \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$　proper smooth なモデル

$E = \mathbb{Q}$, $\lambda = \ell$, $S = \{p | n\}$

$H^q(X_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ q次のエタールコホモロジー

$G_{S\cup\{\ell\}}$ が作用

有限次元 $\mathbb{Q}_\ell$ 線形空間，$G_{\mathbb{Q}}$ のℓ進表現

$p \notin S_\ell$，$p \nmid n\ell$ 素数

$$\det(1 - Fr_p t : H^q(X_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)) = P_q(X_{\mathbb{F}_p}, t) \in \mathbb{Q}_\ell[t] \text{ とおく.}$$

$X_{\mathbb{F}_p}$: X の mod p 還元 $X \underset{\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]}{\otimes} \mathbb{F}_p$

$$Z(X_{\mathbb{F}_p}, t) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\# X(\mathbb{F}_{p^m})}{m} t^m\right) \in \mathbb{Q}[[t]]$$

$X_{\mathbb{F}_p}$ の合同ゼータ関数

$t = p^{-s}$

$$Z(X_{\mathbb{F}_p}, t) = \frac{P_1(X_{\mathbb{F}_p}, t) \cdots}{P_0(X_{\mathbb{F}_p}, t)\, P_2(X_{\mathbb{F}_p}, t) \cdots P_{2d}(X_{\mathbb{F}_p}, t)}$$

Grothendieck の跡公式 $d = \dim X_{\mathbb{Q}}$

Weil予想 $P_q(X_{\mathbb{F}_p}, t) = (1 - \alpha_1 t) \cdots (1 - \alpha_{b_q} t)$

α_i は代数的整数 $|\alpha_i| = p^{\frac{q}{2}}$

複素数としての絶対値

$\Downarrow$

ℓによらない. compatible system

$X_{\mathbb{Q}} = E_{\mathbb{Q}}$ 楕円曲線. $H^1(E_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{Hom}(T_\ell E, \mathbb{Q}_\ell)$

2次元ℓ進表現 $\varprojlim E(\ell^n)$

$$P_1(E_{\mathbb{F}_p}, t) = 1 - a_p(E) t + p t^2$$

$t=1$ とおくと $\# E(\mathbb{F}_p) = 1 - a_p(E) + p$

$H^0(E_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell) = \mathbb{Q}_\ell$, $H^2(E_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell) = \mathbb{Q}_\ell(-1)$

Fr_p は p 倍で作用

$p \nmid S_\lambda$ good prime, good place

$p \mid S_\lambda$ $\quad p \mid S$ | $p = \ell$

monodromy theorem | p-adic Hodge theory

$$G_{\mathbb{Q}_p} \quad \hat{\mathbb{Z}} \quad \hat{\mathbb{Z}}'(1) \xrightarrow{\mathbb{Z}_\ell(1)} GL_n(E_\lambda)$$

の ℓ 進表現 $p \neq \ell$

$$GL_n(E_\lambda) \supset GL_n(\mathcal{O}_\lambda)$$

$$\text{大} \to P \leftarrow \text{pro-}p$$

$\mathcal{O}_\lambda$ の剰余体

$$GL_n(\mathbb{F}_\lambda)$$

有限

$$1 + \mathfrak{m}_\lambda M_n(\mathcal{O}_\lambda) \leftarrow \text{pro-}p$$

極大 ideal

~~Monodromy~~

$$I/P \twoheadrightarrow \hat{\mathbb{Z}}'(1) = \varprojlim_{p \nmid m} \mu_m$$

$$\downarrow$$

$$I/P \xrightarrow{t_\ell} \mathbb{Z}_\ell(1) = \varprojlim_n \mu_{\ell^n} \simeq \mathbb{Z}_\ell$$

Monodromy theorem (Grothendieck)

$\rho: G_{\mathbb{Q}_p} \to GL_{E_\lambda}(V)$ 連続準同型とすると

I の開部分群 J と V の巾零自己準同型 N で

$\forall \sigma \in J$ に対し $\rho(\sigma) = \exp(t_\ell(\sigma) \cdot N)$ となるものが

存在する.

J, N が存在は線形代数

必要：Nの固有値はすべて 0 といえばよい．

$\Uparrow$

$^\forall \sigma \in I$に対し，$\rho(\sigma)$の固有値が1の巾根であることをいえばよい．

$\hat{\mathbb{Z}}$ の $\mathbb{Z}_\ell(1)$ への共役による作用

$G_{\mathbb{F}_p} \curvearrowright \varprojlim \mu_{\ell^n}$ の自然な作用．

$(\mathrm{Fr}_p)^{-1}$ は p乗で作用．

αが$\rho(\sigma)$の固有値

$\Rightarrow \alpha^p$も$\rho(\sigma)$の固有値

$\Rightarrow \alpha$は1の巾根

monodromy thm の帰結

ℓ進表現 $\Rightarrow$ Weil-Deligne群の表現 $(p \neq \ell)$

$\uparrow$

$p=\ell$ p進Hodge

Weil群 profinite

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbb{Q}_p} & \twoheadrightarrow & G_{\mathbb{F}_p} = \hat{\mathbb{Z}} \\ \cup & & \cup \\ W_{\mathbb{Q}_p} & \twoheadrightarrow & \mathrm{Fr}_p^{-1} \in \mathbb{Z} \\ \cup & & \\ I & & \end{array}$$

Weil群 $W_{\mathbb{Q}_p}$

I open subgroup

Weil-Deligne群

$$WD_{\mathbb{Q}_p} = W_{\mathbb{Q}_p} \ltimes \mathbb{G}_a$$

Frがp倍で作用．

$\uparrow$

($\mathbb{Q}$上の)代数群としての加法群

WD の表現 ρ'

$\updownarrow$

W の表現 ρ と (巾零) 自己準同型 N の対で

$$\rho(F)N\rho(F)^{-1} = pN$$

をみたすもの。

もち上げ $F \in W_{\mathbb{Q}_p}$

$\downarrow \quad \downarrow$

$Fr_p \in G_{\mathbb{F}_p}$

monodromy thm の帰結

$\rho(F^n\sigma) = \rho'(F^n\sigma)\exp(t_\ell(\sigma)N)$

$n \in \mathbb{Z}$, $\sigma \in I$ とおくと ρ' $W_{\mathbb{Q}_p}$ の表現