

10/5

Galois 表現の保形性

1994. Wiles - Taylor Fermat LT の $\frac{1}{2}$ 証明

志村-谷山, Serre, Sato-Tate, Fontaine-Mazur

Khare

Harris

11/21 - 23

高木シゲキ

$G_{\mathbb{Q}} = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の 2次元表現の保形性

前回 1996 モジュラ-曲線の代数的性

今回 保形性' a base change
R=T theorem の改良) - 証明

Talks I.H.E.S. の 47-27-11 の報告集の原稿

Galois' rep'n & mod form

P, \bar{P} $G_{\mathbb{Q}}$ の 2次元表現

\uparrow \uparrow
L-表現 法則表現

134 E/\mathbb{Q} 楕円曲線 $T_{\ell}E = \varprojlim E[\ell^n] \quad E[\ell]$

\uparrow
modular form と 絡みつき

modularity ... 類体論の非可換化

Kronecker-Weber の定理

$G_{\mathbb{Q}}$ の 1次元指標 ρ (\mathbb{C}^* 値連続) は

\downarrow \searrow
 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ Dirichlet 指標 χ あり.

$\rho = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[p]{p})/\mathbb{Q})$
p-2 素数

$\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q})$

$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$

\Rightarrow 平方剰余の相互法則

1. Galois 表現

$G_{\mathbb{Q}} = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の絶対 Galois 群

p 素数 $G_{\mathbb{Q}_p} = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ の絶対 Galois 群

$$\bar{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p \text{ fix} \Rightarrow G_{\mathbb{Q}_p} \hookrightarrow G_{\mathbb{Q}}$$

$$\bar{\mathbb{Q}}_p = \mathbb{Q}_p \bar{\mathbb{Q}} \Rightarrow \text{単射}$$

$$\mathbb{Q}_1 \subset \mathbb{Q}_p^{\text{ur}} = \mathbb{Q}_p(\zeta_m : p \nmid m) \subset \mathbb{Q}_p^{\text{tr}} = \mathbb{Q}_p(\sqrt[p^m]{\cdot} : p \nmid m) \subset \bar{\mathbb{Q}}_p$$

最大下位分枝拡大 最大既約分枝拡大

$$G_{\mathbb{Q}_p} \supset I \qquad \supset P \qquad \supset 1$$

慣性群 暴分枝群

$$G_{\mathbb{Q}_p}/I = G_{\mathbb{F}_p} = \text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) \cong \hat{\mathbb{Z}}$$

$$\downarrow$$

$$\text{Frp} \leftarrow 1$$

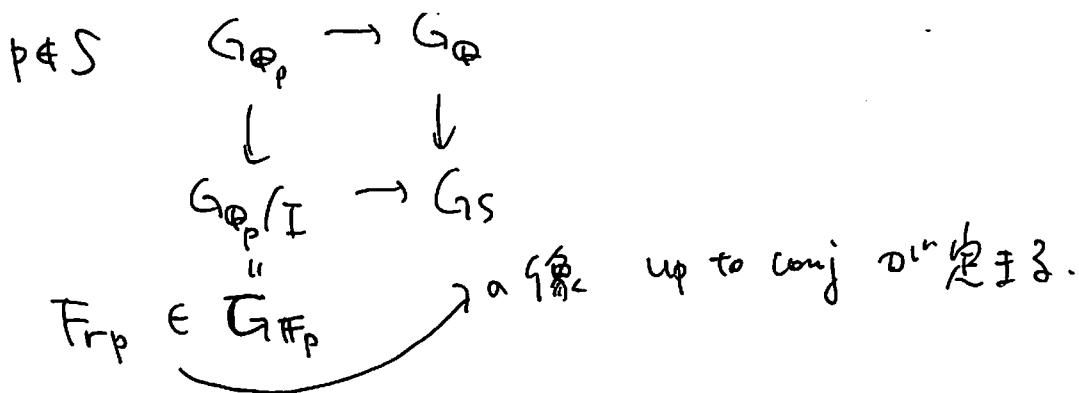
$(a \mapsto a^{1/p})$

$$I/p \cong \hat{\mathbb{Z}}'(1) = \varprojlim_{p \nmid m} M_m \quad \text{Kummer 理論}$$

P pro- p 群 I の pro- p Sylow 群

S 素数 (点) の有限集合

$G_S : G_{\mathbb{Q}}$ の商, 任意の $p \notin S$ に対し, $I_p \subset G_{\mathbb{Q}_p} \hookrightarrow G_{\mathbb{Q}}$ の像が自明なように最大の商



$G_{\mathbb{Q}}$ a ℓ -dimensional representation $\Leftrightarrow G_S$ a ℓ -dimensional representation for some S

$E_\lambda \quad \mathbb{Q}_\ell$ a finite extension of \mathbb{Q} and ℓ prime

$$P: G_S \rightarrow GL_{E_\lambda}(V) \cong GL_n(E_\lambda)$$

continuous
homomorphism

V finite dimensional E_λ -v.sp $n = \dim_{E_\lambda} V$

ℓ -dimensional representation

$F \quad \mathbb{F}_\ell$ a finite extension of \mathbb{F}_p

$$\bar{P}: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_F(V) \quad V \text{ finite dimensional } F\text{-v.sp}$$

continuous homomorphism

mod ℓ representation

$P: G_S \rightarrow GL_{E_\lambda}(V)$, ℓ -dimensional representation

$p \notin S \quad \det(1 - P(\text{Fr}_p)t) \in E_\lambda[t]$
 $(p \notin S)$

(weakly) compatible system

整合系.

E : 有限次代数体 λ : E の有限素点 \Rightarrow "4" に定まり

ρ 適表現の系 (ρ_λ)

S : 素点の有限集合

λ : E の有限素点, $S_\lambda = S \cup \{p : \lambda | p\}$

$\rho_\lambda : G_{S_\lambda} \rightarrow GL_{E_\lambda}(V_\lambda)$ ρ 適表現

(ρ_λ) が weakly compatible ならば

$$\forall \lambda, \lambda' \ \forall p \notin S_\lambda \cup S_{\lambda'} \Rightarrow \det(1 - \rho_\lambda(\text{Frob}_p) t) = \det(1 - \rho_{\lambda'}(\text{Frob}_p) t)$$

$$\begin{array}{ccc} E_\lambda(t) & & E_{\lambda'}(t) \\ & \cup & \subset \\ & E(t) & \end{array}$$

Cebotarev 密度定理 の帰結 $\rho^{S,S}$ (= ρ の半単純化) は

$$\text{Tr } \rho(\text{Frob}_p) \ \forall p \notin S \text{ 上 定まる}$$

Tate 予想 "有限体上の proper smooth な代数多様体の étale cohomology の Frobenius 作用は半単純" の一部

compatible system の例

$X_{\mathbb{Q}}$ \mathbb{Q} 上の proper smooth な代数多様体

$X(\mathbb{Z}[\frac{1}{n}])$ proper smooth な代数多様体

$$E = \mathbb{Q}, \lambda = \ell, S = \{p | n\}$$

$H^0(X_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ g 次 \mathbb{Q}_ℓ の \mathbb{Q}_ℓ 線形空間
 \curvearrowright 有限次元 \mathbb{Q}_ℓ 線形空間, $G_{\mathbb{Q}}$ の表現
 $G_{S \cup \infty}$ の作用

$P \notin S_\ell$, $p \nmid \ell$ 素数 $\in \mathbb{Q}_\ell[t]$
 $\det(1 - Fr_p t : H^0(X_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)) = P_g(X_{\mathbb{F}_p}, t)$ 42.1.

$X_{\mathbb{F}_p}$: $X \bmod p$ 還元 $X \otimes_{\mathbb{Z}[\frac{1}{\ell}]} \mathbb{F}_p$

$$Z(X_{\mathbb{F}_p}, t) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\#X(\mathbb{F}_{p^m})}{m} t^m\right)$$

$X_{\mathbb{F}_p}$ の合同 t^{-1} 関数 $\mathbb{Q}[[t]]$
 $t = p^{-s}$

$$Z(X_{\mathbb{F}_p}, t) = \frac{P_1(X_{\mathbb{F}_p}, t) \cdots P_d(X_{\mathbb{F}_p}, t)}{P_0(X_{\mathbb{F}_p}, t) P_2(X_{\mathbb{F}_p}, t) \cdots P_{2d}(X_{\mathbb{F}_p}, t)}$$

Grothendieck の跡公式 $d = \dim X_{\mathbb{Q}}$

Weil 予想 $P_g(X_{\mathbb{F}_p}, t) = (1 - \alpha_1 t) \cdots (1 - \alpha_{2g} t)$

α_i は t 数の整数 $|\alpha_i| = p^{\frac{g-i+1}{2}}$

\Downarrow

\uparrow 複素数 α_i の絶対値.

l による. compatible system

$X_{\mathbb{Q}} = E_{\mathbb{Q}}$ 楕円曲線 $H^1(E_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell) = \text{Hom}(T_\ell E, \mathbb{Q}_\ell)$

\uparrow 2次元 \mathbb{Q}_ℓ 表現 $\varprojlim E(\mathbb{Q}_\ell^n)$

$$P_1(E_{\mathbb{F}_p}, t) = 1 - a_p(E)t + pt^2$$

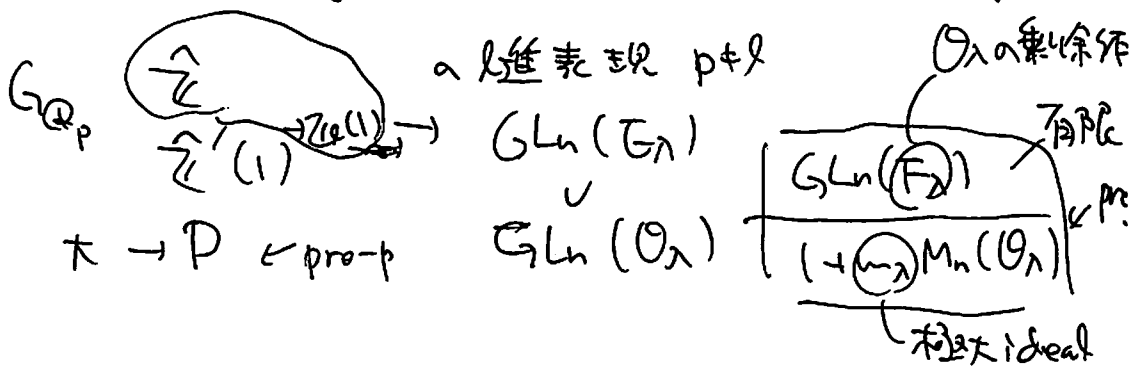
$$t=1 \text{ 且 } t < 4 \quad \# E(\mathbb{F}_p) = 1 - a_p(E) + p$$

$$H^0(E_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E) = \mathbb{Q}_\ell, \quad H^2(E_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}_E) = \mathbb{Q}_\ell(-1)$$

$\mathbb{F}_r \text{ 是 } p \nmid r \text{ 的 } \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$

$p \nmid S_\lambda$ good prime, good place
 $\#$

$p \mid S_\lambda$ $p \mid S$ $p = \ell$
monodromy theorem p -adic Hodge theory



~~Monodromy~~ $\mathbb{I}/p \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}'(1) = \varprojlim_{p \nmid m} \mu_m$

\downarrow

$t_\ell \rightarrow \mathbb{Z}_\ell(1) = \varprojlim_n \mu_{\ell^n}$

\mathbb{Z}_ℓ

Monodromy theorem (Grothendieck)

$\rho: G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow GL_{\mathbb{Z}_\lambda}(V)$ 連続準同型 ρ と $\lambda \neq p$

\mathbb{I} の閉部分群 $J \subset V$ の中零自己準同型 $N \in \mathbb{Z}$

$\forall \sigma \in J$ に対し $\rho(\sigma) = \exp(t_\ell(\sigma) \cdot N)$ と $\lambda \neq p$ の ρ 存在する。

J, N の存在は系集の性質

中身 : N の固有値は $\lambda^2 = 0$ といふ。

$\forall \sigma \in I$ に対し, $P(\sigma)$ の固有値は 1 の中根である といふ。

\hat{G} の $Z_0(1)$ の共役による作用

$G_{\mathbb{F}_p} \curvearrowright \lim_{\leftarrow} \mu_n$ の自然な作用。

$(\mathbb{F}_p^\times)^{-1}$ は p -乗による作用。

α が $P(\sigma)$ の固有値

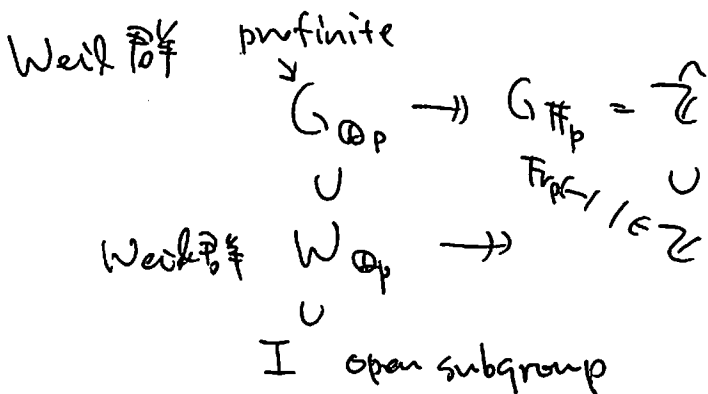
$\Rightarrow \alpha^p \in P(\sigma)$ の固有値

$\Rightarrow \alpha$ は 1 の中根

monodromy theorem の帰結

直表現 \Rightarrow Weil-Deligne 群の表現 ($\phi \neq \rho$)

\uparrow
 $\phi = \rho$ の場合 Hodge



Weil-Deligne 群

\mathbb{F}_p^\times の p -乗による作用。

$$WD_{\mathbb{Q}_p} = W_{\mathbb{Q}_p} \rtimes G_a$$

\uparrow
 $(\mathbb{Q}$ 上の) 代数群 G_a の加法群

WD の表現 ρ'

\downarrow
WD の表現 ρ と (中置) 自己準同 N , N の対 Z

$$\rho(F) N \rho(F)^{-1} = \rho N$$

と h は Z の.

$$\begin{array}{ccc} \text{exists } F \in W_{\mathbb{Q}_p} & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Fr}_p \in G_{\mathbb{F}_p} & & \end{array}$$

monodromy

then
の帰結

$$\left(\begin{array}{l} \rho(F^u \sigma) = \rho'(F^u \sigma) \exp(t_{\mathbb{F}_p}(\sigma) N) \\ h \in \mathbb{Z}, \sigma \in I \subset \mathbb{Z} \subset \rho' W_{\mathbb{Q}_p} \text{ の表現} \end{array} \right)$$