2009-12-7

Serre 予想の 雑な証明の方針

Wiles の証明の復習

$E/\mathbb{Q}$ 上の準安定 楕円曲線

(good or multiplicative reduction
すべての素数で)

$\Rightarrow$ E は modular

i.e. $E[\ell]$ が定める mod ℓ 進表現 $\bar{\rho}_\ell : G_\mathbb{Q} \to GL_2(\mathbb{F}_\ell)$
ℓ 進 〃 $\rho_\ell : G_\mathbb{Q} \to GL_2(\mathbb{Z}_\ell)$

$\exists_\ell$: ρ_ℓ が modular をいいたい.

- $\bar{\rho}_3$ が既約のとき.

$\bar{\rho}_3$: modular Langlands - Tunnel
($GL_2(\mathbb{F}_3)$ が可解)

$\Longrightarrow$ ρ_3 が modular

modularity lifting theorem
MLT

- (3,5) - Trick

$\bar{\rho}_3$ が 可解 のとき $\bar{\rho}_5$ は 既約 (Mazur)

$GL_2(\mathbb{F}_5)$ は A_5 を含むので可約でない

$\exists\, E'$: 別の ell. curve. 準安定

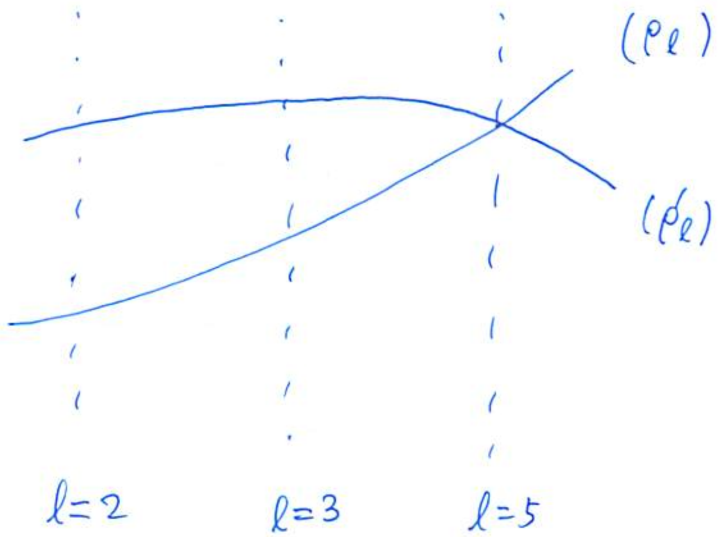
s.t. $\overline{\rho}_3'$: 既約 $\overline{\rho}_5' \simeq \overline{\rho}_5$ $G_{\mathbb{Q}}$ の法5表現として同型

$\because$ $X(15)$ の genus が 0.

$$E' \text{ は modular} \Rightarrow \underset{\overline{\rho}_5}{\overset{\overline{\rho}_5'}{\|}} \text{ modular} \underset{\text{MLT}}{\overset{\uparrow}{\Longrightarrow}} \rho_5 \text{ modular}$$

これを組織的にやろう

mod ℓ 表現



$\overline{\rho}_5' \simeq \overline{\rho}_5$

$\bar{\rho}$

$\rightsquigarrow$ (ρ_λ) compatible system に上げる

$\bar{\rho} \simeq \bar{\rho}_\lambda$

$$\begin{tikzcd}
\bar{\rho} & (\rho_\lambda) \arrow[l, "\bar{\rho} \simeq \bar{\rho}_\lambda"'] \arrow[r, "\text{reduction}"] & \bar{\rho}_\mu
\end{tikzcd}$$

modular とすると

存在 Lifting Theorem

MLT : $\bar{\rho}_\mu$: modular $\Longrightarrow$ ρ_μ modular

$\Updownarrow$

(ρ_λ) modular

$\Downarrow$

$\bar{\rho}$ modular

いいかえると　（別の見方）

$\bar{\rho}$: modular を言いたい.

$\exists f$ $(\rho_{f,\lambda})$ s.t $\bar{\rho}_{f,\lambda} = \bar{\rho}$

compatible sys

$\Downarrow$ $\Uparrow$ MLT/$\mathbb{Q}$ $G_{\mathbb{Q}}$ の表現に対して

$\exists$ $(\bar{\rho}_\lambda)$ $\bar{\rho}_\lambda \cong \bar{\rho}$

$\uparrow$ compatible system への lift の存在.

(f modular form から来るとは限らない)

$\Downarrow$ $\Uparrow$ MLT/F F : 総実代数体

$\exists$ ρ_λ s.t. $\bar{\rho}_\lambda \cong \bar{\rho}$ ℓ-adic repn への lift の存在.

R=T/F.

lifting theorems

いろいろな level がある.

⑪ <u>Lifting theorem</u> (mod ℓ 表現に対する statement)

$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\mathbb{F})$ char $\mathbb{F} = \ell$

有限体. 連続 odd

$\bar{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}(\zeta_\ell)}}$ が絶対既約

(Serre level N
〃 weight $k \geq 2$)

とする。このとき次が成立.

<u>LT (crys)</u> compatible system

$(\rho_\lambda : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(E_\lambda))_\lambda$ で

s.t. $\overline{\rho_{\lambda_0}} = \bar{\rho}$ $(\lambda_0 | \ell)$

で (ρ_λ) の level (= conductor) = N

weight ($\Leftrightarrow$ HT weight $(0, k-1)$)

であるものが存在する. ただし

$2 \leq k \leq \ell + 1$ とする. (N は ℓ で割れない Serre weight ゆえ)

<u>LT ($k=2$)</u> $\exists (\rho_\lambda)$ s.t $\bar{\rho}_{\lambda_0} = \bar{\rho}$ $(\exists \lambda_0 | \lambda)$

(ρ_λ) の level $N \times \ell^{\text{巾}}$ であり,

weight $= 2$ であるものが存在する

⑪ Modularity Lifting theorem

$\rho : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(E_\lambda)$ 連続 ℓ 進表現 odd

geometric

(= 有限個の素点を除き不分岐 + ℓ で pot. semistable)

$\bar{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}(\zeta_\ell)}}$ が絶対既約

level N ($\ell | N$ かも知れない) wt $k \geqq 2$.

とする. このとき、次が成り立つ.

MLT($k=2$), $\ell \neq 2$ とする.

$\bar{\rho}$ が modular $\Rightarrow$ ρ も modular

MLT (k crys) $2 \leq k \leq \ell+1$ かつ $\ell \nmid N$ とすると

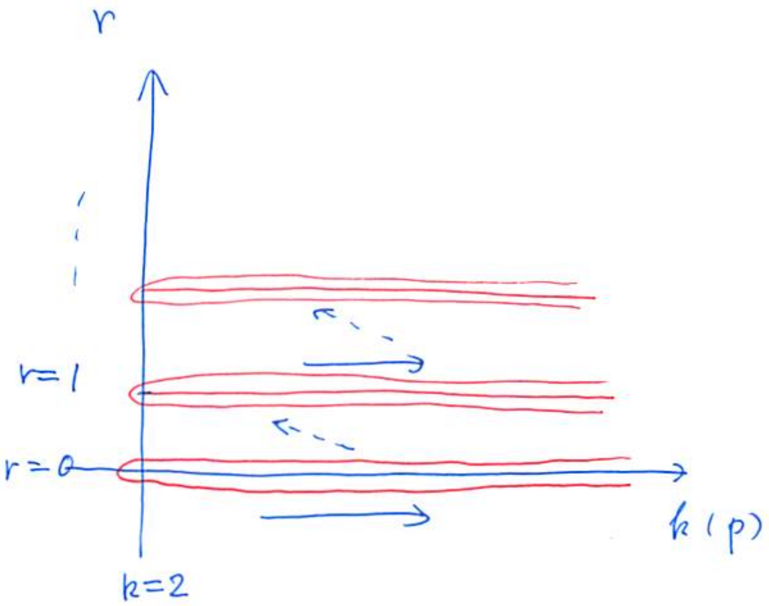
(ℓ で crystalline)

$\bar{\rho}$ が modular $\Rightarrow$ ρ も modular

帰納法で示す　（最初は昨年の田口氏のコーギ）

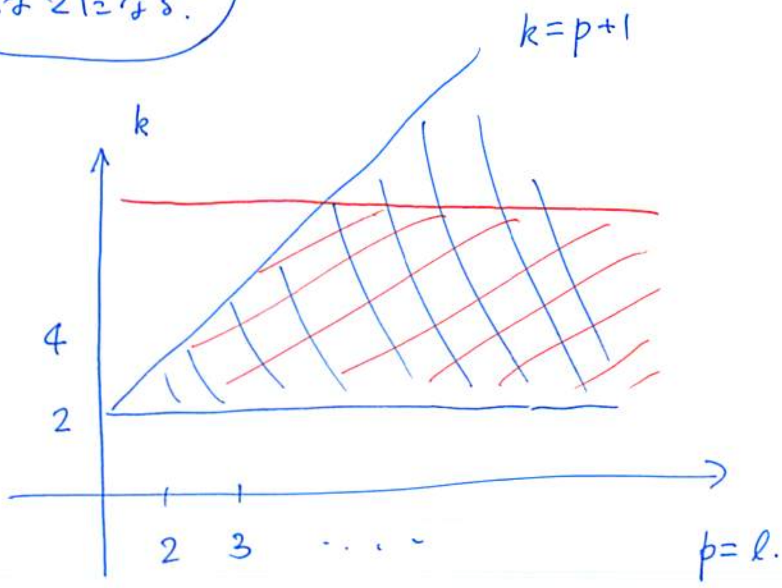
r：　N の素因数の個数

r と k, p に関する 2重帰納法



という順で示す。

rをふやす
kは2になる。



① r をふやす

$\bar{\rho}$　$k=2$　N　が modular を示したい

N の素因数 1つでも示されている.

LT(crys) を適用　すると.　(LT($k=2$) は level を下げるには つかえない)

(ρ_λ) で $k=2$ で同じ N のものがある.

$q|N$ 素因数　$\mu|q$

$\overline{\rho_\mu}$ の Serre level ℓ は N をわりきる

↖ q と素

(reduction すると conductor はへる
(分岐はよくなる))

∴ $\overline{\rho_\mu}$　は 帰納法の仮定より modular.

MLT($k=2$)
より

(ρ_μ は q で crystalline でないので
q-adic rep
MLT (crys) は使えない)

ρ_μ は modular

$\Rightarrow \rho_\lambda$　〃

$\Rightarrow \bar{\rho}$　〃

rem　Khare　(高木 Lect)

Ramanujan Δ

$$\Delta(q) = \sum \tau(n) q^n = q \prod (1-q^n)^{24} \qquad \text{wt } 12 \text{ level } 1$$

$$f_{11}(q) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^2 (1-q^{11n})^2$$

$X_0(11)$ に対応する modular form wt 2 level 11

$$\bar{\rho}_{E,11} \simeq \bar{\rho}_{\Delta,11} \quad (\mathrm{mod}\ 11)$$

$p=11$

$$S_2(\Gamma_0(p), \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\sim} S_{p+1}(SL_2(\mathbb{Z}), \mathbb{F}_p)$$

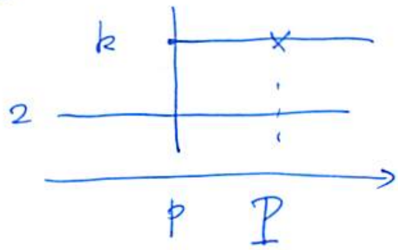
$$f_{11} \bmod p \longleftrightarrow \Delta \bmod p$$

という同型があった。これが motivation になっている。
(Serre)

② p を変える　　$2 \leq k \leq p+1$　　(r : fix)

$(p, 2)$, (p, k) が OK
$\Rightarrow$ (P, k) が OK.
$(k \leq P+1)$

$\bar{\rho}$ mod P 表現　N, k.



(1) $p \nmid N$ のとき

LT(crys) より (ρ_λ) level N, wt k
$\bar{\rho}_\lambda = \bar{\rho}$ がある.

$\mu | p$　$\bar{\rho}_\mu$ level N の約数 wt k

$p \nmid N$ より MLT(crys) が適用でき. ρ_μ : modular $\Rightarrow \cdots$

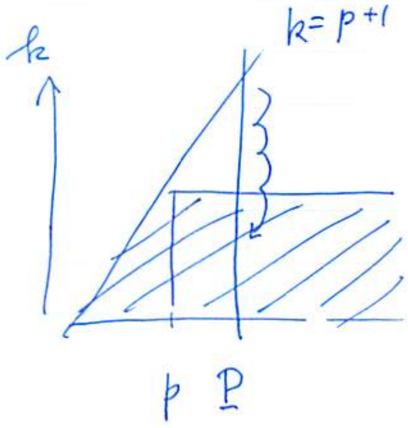
(2) $p | N$ のとき

LT$(k=2)$　(ρ_λ) level $N.p^{\phi}$ wt 2.

$\mu | p$　ρ_μ の level は $N \cdot p^{\phi}$ をわるが,
p とは素. ($\because$ r はふえずにすむ)
wt 2.　$(p, 2)$ OK より modular

MLT$(k=2)$ より ρ_λ : modular $\Rightarrow \cdots$

③ kをふやす



$\bar{\rho}$: mod P 表現　　N , k　　$k > p+1$

$k \leq p+1$ OK に帰着する.

$p-1$ の 2 でない素因数 ℓ　　(Fermat 素数などℓがとれない)

$\ell^\nu \| P-1$　　(ちょうど割りきる)

$k' \equiv k \mod \dfrac{P-1}{\ell^\nu}$ かつ $k' \leq p+1$ に帰着させる

$\bar{\rho} \cdots (\rho_\lambda)$　　LT ($k=2$ だが先のとは別物)

$\lambda | \ell$

$$\begin{array}{c} \bar{\chi}_p^{k'-1} \\ \rotatebox{45}{$\approx$} \\ 0 \to \bar{\chi}_p^{k-1} \to \bar{\rho}_\lambda \to 1 \to 0 \quad (\mathrm{mod}\ \ell) \end{array}$$

χ_p : mod ℓ する前は位数 $p-1$

kをk'にすりかえてもどってくる.

今後の予定

12/21　来週休み.

1/8(金), … 2/1

- MLT

$R=T \Rightarrow$ MLT

枠つき.

- LT

potential modularity (Taylor)

$\Downarrow$ R=T, Böckle

lifting theorem (ℓ-adic)

$\Downarrow$ Brauer induction

" (system)

rem

$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(F)$ Serre level N wt 2

level lowering

f: eigenform level M wt 2

$\bar{\rho} = \bar{\rho}_{f,\lambda}$ とする $N | M$

$\Longrightarrow \exists g$ eigenform level N wt 2

s.t. $\bar{\rho} = \bar{\rho}_{g,\lambda}$

LT があると これは不要.

LT (crys) より (ρ_λ) level N wt 2 s.t $\bar{\rho}_\lambda = \bar{\rho}$

MLT ($k=2$) より ρ_λ . modular $\rho_\lambda = \rho_{g,\lambda}$

level M の $R=T$.

minimal でない

(枠つき なので minimal に
level を下げなくてよくなった)

level N の deformation
の存在を言う $/\mathbb{Q}$

$\Uparrow$

$/F$ ... Skinner-Wiles base change