2009-11-30

Serre weight

Finite

$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\mathbb{F})$ odd, 連続絶対既約

$N(\bar{\rho})$ $\varepsilon(\bar{\rho})$ $k(\bar{\rho})$ $\ell = \mathrm{char}\, \mathbb{F}$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\nwarrow$

ℓ と素

$\bar{\rho}|_{I_\ell}$ $p \neq \ell$

$(\mathbb{Z}/N)^\times \longrightarrow \mathbb{F}^\times$

$\det \bar{\rho}|_{I_p}$ $p \neq \ell$

$\bar{\rho}|_{I_p}$ $p = \ell$

で決まる

k-mod $(p-1)$ は

$\det \bar{\rho}|_{I_p}$ で決まる.

$p \neq \ell$ ($\bar{\rho}|_{I_p}$ の conductor) $\geq$ ($\det \bar{\rho}|_{I_p}$ の conductor)

$$\mathrm{Art}_p(\bar{\rho}|_{I_p}) = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ > 0}} r \times (\bar{\rho}|_{I_p} \text{ の slope } r \text{ 部分の次元})$$

Artin conductor $V^{G^{r+}_{\mathbb{Q}_p}} / V^{G^r_{\mathbb{Q}_p}}$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Art} \geq \max(r : \text{st } V^{G^r_{\mathbb{Q}_p}} \subsetneqq V)$$

$$\vee\!\!\mid$$

$$\mathrm{Art}\, \det \bar{\rho} = \max(r : \text{st } \det \bar{\rho}(G^r_{\mathbb{Q}_p}) \neq 1)$$

$2 \le k(\bar\rho) \le p^2-1$ $(p \neq 2)$ の定義 $(p=\ell)$

$\bar\rho|_{I_p}$ の分類

fundamental char

$$\psi_h : I/P \simeq \hat{\mathbb{Z}}(1) = \varprojlim_{p \nmid m} \mu_m \longrightarrow \mu_{p^h-1} = \mathbb{F}_{p^h}^\times$$

cases

1) $\bar\rho|_{I_p} \simeq \psi_2^{a+pb} \oplus \psi_2^{b+pa}$

$0 \le a < b \le p-1$

($\psi_2^{p+1} = \psi_1$ なので. p 進展開)

admissible filtered φ-mod

Gal 表現 　 $G_{\mathbb{Q}_p}$ から I_p への制限

filt mod 　 $\mathbb{F}_p$ から $\overline{\mathbb{F}_p}$ への係数拡大

$M(h, i)$ 　 $i = (a, b)$ 　 $i : \mathbb{Z}/h\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $h = 2$

functor

$M \longrightarrow V(M)$ 　 $\dim_k M = \dim_{\mathbb{F}_p} V(M)$

$\mathbb{F}_{p^2}$ 〜 $\mathbb{F}_p$ 上 2次元

に見えることと

compatible.

2) $\psi_1 = \chi$ mod p cyclotomic

$$\bar{\rho}|_{I_p} \simeq \chi^a \oplus \chi^b \qquad 0 \le a, b < p-1$$

3) nontrivial extension

$$0 \to \chi^\beta \to \bar{\rho}|_{I_p} \to \chi^\alpha \to 0$$

$2 \le k(\bar{\rho}) \le p-1$ となるための必要条件

mod p の p進 Hodge より.

$k \le p-1$

H^1(modular curve Sym^{k-2})

$k-1$次元久賀-佐藤 variety

1) 条件は $a = 0$ このとき $b = k-1$. だから

$k(\bar{\rho}) := b+1$

2) 条件は $0 = a < b$ このとき $b = k-1$ だから

$k(\bar{\rho}) = b+1.$

3)

$$0 \longrightarrow \chi^{\beta} \longrightarrow \bar{\rho}|_{I_p} \longrightarrow \chi^{\alpha} \longrightarrow 0$$

$$\{\alpha, \beta\} = \{0, k-1\}$$

$$\mathrm{Ext}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(\chi^{\alpha}, \chi^{\beta}) = \mathrm{Ext}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(1, \chi^{\beta-\alpha})$$

$i = \beta - \alpha$

$$= H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p(i))$$

χ^i の表現空間 $\mathbb{F}_p(i)$

$p \neq 2$

$$\chi(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p(i)) = \dim H^0 - \dim H^1 + \dim H^2$$

$\updownarrow$ Tate duality

$H^0(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p(1-i))$

$$= -\dim \mathbb{F}_p(i)$$

$$= -1$$

$$\dim H^1 = 1 + \overbrace{\dim H^0}^{\begin{cases} 1 & i=0 \\ 0 & \text{other} \end{cases}} + \underbrace{\dim H^0(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p(1-i))}_{\begin{cases} 1 & i=1 \\ 0 & \text{other} \end{cases}}$$

$$= \begin{cases} 2 & i = 0, 1 \\ 1. & \text{それ以外.} \end{cases}$$

$(\mathrm{mod}\ p-1\ で)$

$i=0$

$$H^1_f(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p(i))$$ 不分岐部分, finite part

$$0 \to H^1(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \to H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p) \to \text{分岐} \to 1$$

1次元

$i=1$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times/(\mathbb{Z}_p^\times)^p \longrightarrow H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p(1)) \xrightarrow{\text{valuation}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 1$$

1次元 $(p \neq 2)$

$$H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p(1)) \overset{\text{Kummer}}{=} \mathbb{Q}_p^\times/(\mathbb{Q}_p^\times)^p$$

"$H^1_f(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p(i))$" ← 1かたまりの記号とみる

μ_p に対応

$$:= \mathrm{Im}\left(\mathrm{Ext}^1_{MF^a_{\mathbb{Q}_p}}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p(i)) \xrightarrow{V} H^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(i))\right)$$

$$\dim H^a - \dim H^1_f = \dim \underbrace{\mathbb{F}_p(i)}_{1} - \dim \underbrace{\mathrm{Fil}^1(\mathbb{F}_p(i))}_{\begin{cases}1\\0\end{cases}}$$

$$\dim H^1_f = \begin{cases} 1 & i \geq 0 \\ 0 & i < 0 \end{cases}$$

	$\dim H^1$	$\dim H^1_f$	
$i=0$	2	1	← 使わない
$i=1$	2	1	
$i<0$	1	0	
$i>1$	1	1	

ext. cristalline

3) $\rho|_{I_p} = \begin{pmatrix} \chi^\beta & * \\ 0 & \chi^\alpha \end{pmatrix}$ nontriv ext.

条件は $\alpha = 0$ $\beta = k-1$.

$k \geq 3$ ならいつもOK. $\beta < p-1$
$3 \leq k \leq p-1$

$k=2$ のとき

$[\bar{\rho}] \in H^1_f(\mathbb{Q}_p, \mathbb{F}_p(1))$ が条件

$\beta = 0$ $(k=1)$ はだめ

（幾何的構成がそもそもない）

まとめ

$\alpha = 0$

- $\beta \geq 2$ なら $k = \beta + 1$ とおく $3 \leq k \leq p-1$
- $\beta = 1$ のとき
  - $\in H_f$ のとき finite flat peu ramifié $k=2$ とおく.
  - そうでないとき $k = p+1$ とおく.
- $\beta = 0$ のとき $k = p$ とおく.

$k \in [2, p+1]$

一般の場合

"θ-cycle"

$\bar{\rho}$ を円分指標の巾で twist すると weight がずれる

χ : mod p 円分指標

$$\bar{\rho}\otimes\chi = \psi_2^{1+p}$$

1) $(a, b) \longmapsto (a+1, b+1)$

2) $(a, b) \longmapsto (a+1, b+1)$

3) $(\alpha, \beta) \longmapsto (\alpha+1, \beta+1)$

表現を twist

modular form では

$\chi\otimes f$ $\quad$ kを変えずに Nをふやす

$$f = \sum a_n q^n \mapsto \chi\cdot f = \sum \chi(n)\, a_n q^n$$

θf $\quad$ kを $p+1$ ふやす. Nは変わらない.

$$\theta f = q\frac{d}{dq} f = \sum a_n n q^n$$

$\chi(n) \equiv n \mod p$ なので、 $\mathrm{mod}\ p$ すると

2つの作用は同じ.

1) a, b のとき $k = 1 + pa + b$ とおく.

2) 〃 〃 〃

ただし $a = b = 0$ のときは $k = p$

3) $\bar{\rho}|_{I_p} = \begin{pmatrix} \chi^{\beta} & * \\ 0 & \chi^{\alpha} \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{l} 0 \leq \alpha < p-1 \\ 1 \leq \beta \leq p-1 \end{array} \right)$ とおく.

$$a = \max(\alpha, \beta)$$
$$b = \min(\alpha, \beta)$$

$k = 1 + pa + b$ とおく. ただし.

$\chi^{-\alpha}\bar{\rho}$ が peu ramifie でないとき

(très ramifié) さらに $+p-1$ する.

$2 \le k \le p^2-1$ 一般

$2 \le k \le p+1$ 1), 2) $a=0$ or 3) $\alpha=0$

↑ 以後はこちらだけ出てくる.

注 $p=2, 3$ のとき 特別な2次体がある

$\bar{\rho}$ が $\mathrm{Ind}_{G_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}}^{G_{\mathbb{Q}}} \varphi$ $p=2$

$\mathrm{Ind}_{G_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}}^{G_{\mathbb{Q}}} \varphi$ $p=3$

のとき要修正?

Katz の modular form をつかって.

$k=1$ を許すほうが自然 Edixhoven

Serre 予想の帰結

compatible system の modularity

$\Longrightarrow$ 志村・谷山 ($\Rightarrow$ Fermat's Last Theorem.)

類似 Artin 予想

Artin 予想

F 代数体.

$\rho : G_F \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ 既約連続 $\rho \neq 1$.

$L(\rho, s)$ は 全 s 平面 の 整関数に
解析接続される.

有理関数 はわかっている
induction.

$$\left.\begin{array}{ll} F = \mathbb{Q} & n=2 \\ \rho = \text{odd} & \end{array}\right) \text{のときが Serre 予想 から従う}$$

Prop Serre予想が成り立つとし，

(ρ_λ) ℓ進表現の compatible system.
2次元，odd 既約
Hodge-Tate weight $(0, k-1)$ $k \geqq 2$.

とすると．wt k の eigen newform f で．

$$(\rho_\lambda) = (\rho_{\lambda,f})$$

となるものがある．

応用 $E/\mathbb{Q}$ 楕円曲線

$(T_\ell E)_\ell$ は上の条件をみたす $(k=2)$

$\Longrightarrow$ 志村-谷山．

Prop の証．

（mod ℓ 表現がキヤクだからといって ℓ進表現がキヤクとは限らないので．）

ほとんどすべての λ で $\bar{\rho}_\lambda = \rho_\lambda \bmod \lambda$ が既約なことを示す．

$L :=$ {そうでない λ} とおく.

L が無限として矛盾を示す.

$$\bar{\rho}_\lambda^{s.s} = \chi_\lambda \oplus \chi_{\lambda'}$$

$N :=$ (ρ_λ) の conductor.

$L \cap \{p : p \mid N\} = \phi$ とする.

$\bar{\rho}_\lambda$ $\quad N\ell$ $(\lambda \mid \ell)$ 以外で不分岐

$\bar{\rho}_\lambda^{s.s}$ $\quad \bar{\rho}^{s.s}\big|_{I_\ell} = 1 \oplus \chi^{k-1}$

(λ のない χ は mod ℓ 円分指標)

$$\bar{\rho}_\lambda^{s.s} = \chi_\lambda \oplus \chi''_\lambda \chi^{k-1}$$

mod ℓ したほうが分岐は小さく

$\chi_\lambda \chi''_\lambda$ の conductor の積 $= \bar{\rho}_\lambda$ の conductor

は ρ_λ の conductor N をわりきる.

$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ の指標

なので. $\exists\ \chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \longrightarrow E^\times$ s.t.

χ'' 適当に拡大

$\{\lambda \in L \mid \chi_\lambda \equiv \chi \bmod \lambda,\ \chi''_\lambda \equiv \chi'' \bmod \lambda\}$

が無限.

このとき ほとんどすべての p で

$$\mathrm{Tr}\left(\rho_\lambda(\varphi_p)\right) \equiv \chi(p) + \chi''(p)\, p^{k-1} \mod \lambda.$$

したがって $\mathrm{Tr}\,\rho_\lambda(\underbrace{\varphi_p}_{\text{Frob}}) = \chi(p) + \chi'(p)\, p^{k-1}$

で ρ_χ の既約性に反する.

$\lambda \in L$ とすると

$$\bar{\rho}_\lambda \equiv \bar{\rho}_{f,\lambda}$$

となる level N, weight k の modular form f_λ がある.

$S_k(\Gamma_1(N)) \leftarrow$ 有限次元.

$\exists f$ s.t.

$\{\lambda \in L \mid \bar{\rho}_\lambda \equiv \bar{\rho}_{f,\lambda}\}$ が無限

$\mathrm{Tr}\,\rho_\lambda(\varphi_p) \equiv a_p(f) \mod \lambda$ が

無限個の λ について成り立つ.

$\therefore\ \mathrm{Tr}\,\rho_\lambda(\varphi_p) = a_p(f).$

よって $\rho_\lambda = \rho_{\lambda,f}$ //