2009-11-16

補足

1. global - local compatibility

f : normalized eigen newform　　$\mathbb{H}$ 上の関数

$\updownarrow$　　　　　　　　　　　　　$\rightsquigarrow$ $\mathbb{A}_f$ 上の関数

π_f　　$GL_2(\mathbb{A}_f)$ の irred admissible repn

$\|$　　　　$\|$

$\bigotimes \pi_{f,p}$　　$\prod GL_2(\mathbb{Q}_p)$

$\pi_{f,p}$　$GL_2(\mathbb{Q}_p)$ の irred rep. auto repn

$E = \mathbb{Q}(f)$　　$(\rho_{f,\lambda})$　　$G_{\mathbb{Q}}$ の 2次元 ℓ-adic rep

λ. E の finite place.

$WD(\rho_{f,\lambda}|G_{\mathbb{Q}_p})$: $WD_{\mathbb{Q}_p}$ の 2次元表現

local Langlands　　E_λ 上 defined

Carayol

$\pi_{f,p}$　$GL_2(\mathbb{Q}_p)$ の rep $\longleftrightarrow$ $\left(WD(\rho_{f,\lambda}|G_{\mathbb{Q}_p})\right)^{F\text{-s.s}}$

E 上定義される　　　$WD_{\mathbb{Q}_p}$ の repn

(newvector は 1次元なので)

Frobenius semisimplification

2. G : locally compact
$\cup$
K : open compact

$\rightsquigarrow T(K)$ Hecke 環

$$(G\text{ の adm rep'n}/\mathbb{C}) \qquad (T(K)\text{-mod}\ \ \mathbb{C}\text{上有限次元})$$

$$V \longmapsto V^K = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}[G/K], V)$$

右 $T(K)$-module

adjoint

$$\mathbb{C}[G/K] \otimes_{T(K)} M \longleftarrow\!\shortmid M$$

$\simeq id$ のはず？

$\rightsquigarrow$ fully faithful.

3. $\mathbb{Q}$ のかわりに 総実代数体 F でもよい

elliptic modular form $\rightsquigarrow$ Hilbert modular form
ふつうの

Serre 予想

$\mathbb{F}$ 有限体

$\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\mathbb{F})$ 絶対既約連続表現
odd

$\Rightarrow \exists N, k, \varepsilon, f \quad \mathcal{O}_{E_\lambda} \longrightarrow \mathbb{F}'$

$$\mathbb{F}' \supset \mathbb{F}$$

s.t.

$$\rho_{f,\lambda} \otimes_{\mathcal{O}_{E_\lambda}} \mathbb{F}' \simeq \bar{\rho} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}'$$

N, ε : ℓとは異なる p に対する $\bar{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ で定まる

k : $\ell = p$ の $\bar{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ で定まる.

$k \bmod p-1$ $(p=\ell)$ は $\det \bar{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ で "

N : $\bar{\rho}$ の Artin conductor

$$N = \prod_{p \neq \ell} p^{\underbrace{f_p(\bar{\rho})}} \quad \text{有限積}$$

$$\| \quad N(\bar{\rho})$$

ほとんどすべての p で 0 なので.

$f_p(\bar{\rho})$: $\bar{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ の Artin conductor
(の exponent)

$$= \underbrace{\dim V}_{= 2} - \dim V^{I_p} + Sw_p V$$

$Sw_p V \geq 0$　等号成立. $\Updownarrow$ P_p が triv に作用

inertia fixed part

$I_p \subset G_{\mathbb{Q}_p}$ inertia

wild inertia

$f_p(\rho_{E,\lambda})$ も同じ式で定義

P_p への制限で定まり $p \neq \ell$

$$f_p(E_{\rho,\lambda}) \geq f_p(\bar{\rho})$$

例　$E = E_{a,b,c}$　Frey curve　$c^\ell = a^\ell + b^\ell$

$p \neq 2, \ell$

E は p で semistable reduction

$\Rightarrow \quad f_p(T_\ell E) = \begin{cases} 0 & \text{good} \\ 1 & \text{multiplicative.} \end{cases}$　triv

inertia unipotent に作用　$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的

$E[\ell]$ は $G_{\mathbb{Q}_p}$ の作用は $\underbrace{\text{不分岐}}_{\text{mult red であっても}}$

$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　ℓ でわれる

minimal model の
closed fiber の cpt
の数が ℓ でわれるから

$N(\bar{\rho}) = 1$ or 2.

(level が小さすぎる.

志村・谷山 $\Rightarrow$ Fermat のギロン)

$$\varepsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \mathbb{F}^\times$$ の決め方

$$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times = \prod_{p \neq \ell} (\mathbb{Z}/p^{f_p(\bar\rho)}\mathbb{Z})^\times$$

$$\det \bar\rho|_{G^{ab}_{\mathbb{Q}_p}} : \begin{tikzcd} G^{ab}_{\mathbb{Q}_p} \arrow[r] & \mathbb{F}^\times \\ \mathbb{Q}_p^\times \arrow[u, "\mathrm{rec}"] & \\ \mathbb{Z}_p^\times \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[r] & (\mathbb{Z}_p/p^{f_p(\bar\rho)}\mathbb{Z})^\times \arrow[uu, "\text{局所類体論}"'] \end{tikzcd}$$

$$f(\bar\rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}}) \geq f(\det \bar\rho|_{G_{\mathbb{Q}_p}})$$

Galois 表現の構成

これまで　geometric　cohomology　← geometric Frobenius と相性がよい

これから　数論　homology　← arithmetic Frobenius と相性がよい.

統一はもはや不可能
ごちゃまぜにやるかも.

$$\det \bar{\rho}\Big|_{G_{\mathbb{Q}_\ell}} = \varepsilon \times \mathrm{cyclo}_\ell^{k-1}$$

法 ℓ 円分指標.
位数 $\ell-1$

$k-1 \bmod \ell$ をこれで決まる

$$\ell = p \qquad (\rho_{f,\lambda}|G_{\mathbb{Q}_p}) \otimes_{E_\lambda} \mathbb{C}_p \simeq \mathbb{C}_p \oplus \mathbb{C}_p(1-k)$$

mod p 表現だけでも, $k-1<l-1$ なら $k-1$ は決定できる. (torsion 係数の p進 Hodge)
Fontaine - Lafaille

$l=p$

$k=k(\bar{\rho})$ の定義

$$\bar{\rho}\big|_{I_p}$$

$$\begin{matrix} I & & P \\ \parallel & & \parallel \\ I_p & \supset & P_p \end{matrix}$$

$$I/P \simeq \hat{\mathbb{Z}}'(1) = \varprojlim_{p\nmid n} \mu_n$$

I/P の $\bar{\mathbb{F}}$ 値指標の分類 $\quad h \geq 1$

$$\psi_h : I/P \twoheadrightarrow \mu_{p^h-1} = (\mathbb{F}_{p^h})^\times$$
$$\cap$$
$$(\bar{\mathbb{F}}^\times)$$

を level h の <u>fundamental character</u> という

$$i : \mathbb{Z}/h\mathbb{Z} \longrightarrow \{0, 1, \cdots, p-1\} \subset \mathbb{Z}$$

$$\searrow \mathbb{Z}/h'\mathbb{Z} \nearrow$$

$h' | h \Rightarrow h' = h$ のとき

$i = (i_0, \cdots, i_{h-1})$　　i: primitive　　h: level.

$$\psi_h^i := \psi_h^{\underbrace{i_0 + i_1 p + i_2 p^2 + \cdots + i_{h-1} p^{h-1}}}$$

$$0 \leq * \leq p^{n-1}$$

$$\psi_{h'} = \psi_h^{\frac{p^h - 1}{p^{h'} - 1}} = \psi_h^{1 + p^{\frac{h}{h'}} + \cdots}$$

primitive

より短い周期で表されるならおきかえる

$$(\psi_h^i)^p = \psi_n^{i_0 p + \cdots}$$

共役 ⇒ 番号をずらす.

$\therefore$ I/P の指標 / (G/I による共役)　($G = G_{\mathbb{Q}_p}$)

$$= \coprod_h \{\text{primitive} : \mathbb{Z}/h\mathbb{Z} \to \{0, 1, \cdots, p-1\}\} / \text{ずらす}$$

@ p群の標数 p の有限次元半単純表現は自明

$GL_n(\mathbb{F})$ の p-Sylow群は $\left\{\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ と共役.

位数を見よ.

$\bar{\rho}|_I$　　Iの2次元 $\mathbb{F}$ 表現

$\wr$

必要に応じて適宜拡大

$\bar{\rho}$の半単純化に出てくる指標の level

$\rightsquigarrow$ level 2 or 1 がわかる　　(共役の orbit を見ると)

- level 2　　$\psi \oplus \overline{\psi}$　　$h=2$　$i=(i_0, i_1)$

  $i_0 \neq i_1$　　$\underset{a}{\underset{\parallel}{i_0}} < \underset{b}{\underset{\parallel}{i_1}}$

- level 1　　$\psi \oplus \psi'$　どちらも $h=1$

  $\chi = \text{cyclo}$

  $\chi^a \oplus \chi^b$

  $0 \leq a, b < p-1$

- level 1　　上の非自明な拡大

cf Serre ℓ進表現

$$G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\mathbb{Z}_p)$$

ほとんどすべてのpで 像が open

〃 全射

Propriétés galoisiene ..

$$2 \leq k(\bar{\rho}) \leq p^2-1 \qquad (p \neq 2)$$

$$k(\bar{\rho}) = 2 \text{ or } 4 \qquad (p=2)$$

geometric構成

(wt k のとき) $a : E_{Y_1(N)} \longrightarrow Y_1(N)$

$X_1(N)$ universal Tate module

前は $k=2$ なので定数層だった.

$$H^1(X_1(N), j_* \mathrm{Sym}^{k-2} R^1 a_* \mathbb{Q}_\ell)$$

$a : E_{Y_1(N)} \to Y_1(N)$
$k-2$個の fiber product の
cohomology を分解した

$k-1$次元

H^q $\quad \dfrac{q < p-1}{\overset{\|}{k-1}}$ ← (torsion 係数の p進 Hodge がうまくいく 条件)

X が mod p で good reduction (⇐ $p \nmid N$ ならOK)

$k(\bar{\rho}) = k < p$ となるような $\bar{\rho}$ は torsion 係数の p進 Hodge (= F-L) で扱えるものでなくてはいけない.

V: p-adic repn ← 保型形式からくる $V = V_f$

X: good reduction

$H^q(X)$ $\quad q < p-1$

$D = D_{dR}(V)$ filtered $\mathbb{Q}_p$ vector space

$Gr^i D \neq 0 \Rightarrow i = 0, k-1$

$V \supset T$ lattice $\quad \bar{V} = V \otimes \mathbb{F}$

$\bar{D} = M$

admissible filtered φ-module のなす category (abelian)

(k : char p の完全体)

- M 有限次元 k-vect space ($k = \mathbb{F}_p$)
- $M^i \subset M$ finite degreasing filt.

$$M^a = M \qquad M^{b+1} = 0$$

$$a \leq b.$$

- $\varphi_i : M^i \longrightarrow M$ Frobenius linear

$$\varphi_i | M^{i+1} = 0 \ (= p\varphi_{i+1} = 0)$$

- $M = \sum \varphi_i (M^i)$ (← abelian cat にするのに必要)

$k = \bar{k}$ のときの simple object の分類

$h \geq 1 \qquad i : \mathbb{Z}/h\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ primitive. (先の i の拡張)

$$M(h, i) = \bigoplus_{m=0}^{h-1} k e_m \quad \text{as vect space.}$$

$$M^i = \langle e_m : i_m \geq i \rangle$$

$$\varphi^i (e_m) = e_{m+1}.$$

次のような functor がある

$K_0 = \mathrm{Frac}\, W(k)$

$k=\bar{k}$

$$\begin{array}{ccc} (\text{adm filt } \varphi\text{-mod}) & \longrightarrow & (\text{cristalline } G_{K_0}\text{-repn}) \\ \Psi & & \Psi \\ M & \longmapsto & V(M) \\ M(h,i) & \longmapsto & \psi_h^i \end{array}$$

$V(M(h,i)) \subset (\bar{\rho}_{f,\lambda}|_{I_p})^{s.s.}$ となるとすると

$i_* = 0,\ k-1 \qquad n=1,2$

p 6-10 の 3つの type と比較すると：

$k(\bar{\rho}) < p$ となるためには

- $a=0 < b=k-1$ でなくてはいけない。

  $k = k(\bar{\rho})$ と def.

  (上の 2つの場合)

- extension のあるとき 次回.