3 指数公式

3.1 ひきもどし.

定義 1.1. X dim n $C \subset T^*X$ $\cup C_a$ dim n

$h: W \to X$ W dim m

1. h が properly C-transversal とは
 C-trans. かつ. $h^\circ C$ のすべての既約成分の次元が m.

注 いつも dim $\geq m$.

h が smooth なら明らか. h が imm のときは.

※ A noetherian local $\dim A/(f_1, \dots f_c) \geq \dim A - c$.
A integral 等号 $= \iff f_1, \dots f_c$ reg. seq..

2. $h: W \to X$ properly C-trans. . $A = \sum m_a C_a$

$$h^! A = (-1)^{n-m} \sum m_a \underline{h^{\circ}[C_a]}$$

$$T^*X \leftarrow W \times_X T^*X \to T^*W$$ algebraic correspondence

loc. c.i
smooth or reg imm

定理 1.2. X. C. $\mathcal{F}$ micro supp on C. $CC\mathcal{F} = \sum m_a C_a$
$h: W \to X$ properly C-transversal なら

$$CC h^*\mathcal{F} = h^! CC\mathcal{F}$$

命題 1.3 (Beilinson) $h: W \to X$ C-transversal なら
(問題) $h^*\mathcal{F}$ は $h^\circ C$ に超局所台をもつ

・係数を比較すればよい. reg imm の場合に示せばよい.
div. の場合に示せばよい
2次元の場合に帰着させて証明 [illegible] あとまわし.

3.2 指数公式

$P_2 = \bar{P}_2$

定理2.1. X projective なら

$$\chi(X, \mathcal{F}) = (CC\mathcal{F}, T^*_X X)_{T^*X}$$

1次元ならGOS 帰納法で次元に帰着.

L よい pencil

- 有限個を除き $H \in L$ なら $P_i: W = X \cap H \to X$ は properly trans
- $P_i': V = A_X \cap A_L \to X$ は properly transversal,
  trans. $\Leftrightarrow$ $X_L \to X$ も =
- $p_L: X_L \to L$ は isol. cha pt しかもたない
  それらは V にふくまれない

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \chi(X_L, \pi^*\mathcal{F}) - \chi(V, \mathcal{F}|_V)$$

$$\chi(X_L, \pi^*\mathcal{F}) = \chi(L, Rp_{L*}\pi^*\mathcal{F})$$

$$= 2\cdot\chi(W, \mathcal{F}|_W) - \sum_u \mathrm{dimtot}\, \varphi_u(\mathcal{F}, p_L)$$

帰納法の仮定 + 定理1.2

$$\chi(W, \mathcal{F}|_W) = (P_i^! CC\mathcal{F}, T^*_W W)_{T^*W}$$
$$\chi(V, \mathcal{F}|_V) = (P_i'^! CC\mathcal{F}, T^*_V V)_{T^*V}$$

Milnor公式

$$-\mathrm{dimtot} = (CC\mathcal{F}, T^*_X X)_{T^*X, u}$$

$A = CC\mathcal{F}$

1. $(\pi^! A, T^*_{X_L} X_L)_{T^*X_L} = 2\cdot(P_i^! A, T^*_W W)_{T^*W} + \sum_u (A, T^*_X X)_{T^*X, u}$

2. $(A, T^*_X X)_{T^*X} = (\pi^! A, T^*_{X_L} X_L) - (P_i'^! A, T^*_V V)_{T^*V}$

補題 2.2

1. $f: X \to Y$ Y curve genus g

$$(A, T_X^b X) = (2-2g)(f_1^! A, T_W^b W) + \sum_u (A, T_X^b X)_{T_{X,u}^b}$$

2. $\pi: X' \to X$ $i: V \to X$ properly trans. imm codim 2

$$(\pi^! A, T_X^b X') = (A, T_X^b X) + (i^! A, T_V^b V)$$

証明 1. $f = id$ のとき

A 0-section. $2-2g = 2-2g$

fiber $1 = 1.$

$$(A, T_X^* X) = (df^* A, X \times_Y T_Y^* Y) = (f_! A, T_Y^* Y)$$

$$T^* X' \leftarrow X' \times_X T^* X \to T^* X$$

2. $(\pi^! A, T_{X'}^* X') = (\pi^* A, X' \times_X T_X^* X + K)$

$$K = \mathrm{Ker}(E \times_X T^* X \to E \times_{X'} T^* X')$$

$$= (A, T_X^* X) + (i^! A, T_V^* V) \cdot \deg T_E^b X$$

$$\begin{array}{c} 0 \\ \downarrow \\ 0 \to K \to E \times_V T_V^* X \to T_E^* X \to 0 \\ \downarrow \\ E \times_X T^* X \\ \downarrow \\ E \times_V T^* V \\ \downarrow \\ 0 \end{array}$$