命題 3.1 $p: X \to S$ は $\mathcal{F}$ に関して univ. loc. acyc. とすると、
$\varphi_{f,\mathcal{F}}$ は平坦

証明 $K = R\Psi_f \mathcal{F}$ ← constructible (Orgogozo)

x : Z の geom. pt.

$y = f(x)$ Y の geom. pt

$(s = p(x) = g(y))$

$$X \times_Y \overleftarrow{Y}$$

$$\begin{tikzcd}
 & X_{(x)} \arrow[dl] & \supset Z_{(x)} \arrow[dl, "\text{finite}"] \arrow[ddl, bend left, "\text{finite}"] \\
x \times_Y \overleftarrow{Y} = Y_{(y)} \arrow[d, "\text{rel. curve (of strict localization)}"'] & \supset T_{(x)} := Z_{(x)} \text{ の像} \arrow[dl, "\text{finite}"] & \\
S_{(s)} & &
\end{tikzcd}$$

$K|_{Y_{(y)}}$ は $Y_{(y)} - T_{(x)}$ で loc. const. (命題 1.2.2)

Deligne−Laumon の仮定はみたされる.

$$\dim(R\Phi_g K)_{y \leftarrow t} = \delta(\varphi_K)(y \leftarrow t)$$

$$y = f(x), \quad S_{(s)} \leftarrow t, \quad T_{(x)} \times_{S_{(s)}} \overleftarrow{t}$$

示したい式 $\varphi_{\mathcal{F},f}(x) = \sum_{z \in Z_{(x)} \times_{S_{(s)}} t} \varphi_{\mathcal{F},f}(z)$ $(x \leftarrow t : Z \times_S \overleftarrow{S}$ の点$)$

上の左辺 $= 0$, 上の右辺 = 下の右辺の差を示す。

$\mathcal{K}|_{Y_{(y)}}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{K}$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F} & & \ni y & & \\ X_{(x)} & \to & Y_{(y)} & \subset & \overleftarrow{X \times_Y Y} \\ & \searrow & \downarrow \overleftarrow{g} & & \downarrow \overleftarrow{g} \\ t & \to & S_{(s)} & \subset & \overleftarrow{X \times_S S} \end{array}$$

$R\Psi_g \mathcal{K}$

$$R\Gamma(X_{(x)} \times_{\cancel{Y_{(y)}}} \cancel{Y}_{(y)}, \mathcal{F}_x)$$

$$\begin{array}{ccccc} & \| & & & \\ \mathcal{K}_y & \to & (R\Psi_g \mathcal{K})_{y \leftarrow t} & \to & (R\Phi_g \mathcal{K})_{y \leftarrow t} \to \\ \| & & \| & & \| \\ & & (R\overleftarrow{g}_* \mathcal{K}|_{Y_{(y)}})_t & & \\ & & \| \quad = R\overleftarrow{f}_* \mathcal{F} & & \\ & & (R\overleftarrow{p}_* \mathcal{F})_t & & \\ & & \| & & \\ \mathcal{F}_x & \to & (R\Psi_p \mathcal{F})_{x \leftarrow t} & \to & (R\Phi_p \mathcal{K})_{x \leftarrow t} \to \\ & & & & \| \Leftarrow p: \text{univ. loc. acyc.} \\ & & & & 0 \end{array}$$

$\therefore$ 上の左辺 $= \dim (R\Phi_p \mathcal{F})_{x \leftarrow t} = 0$.

$$\delta(\varphi_{\mathcal{K}})_{y \leftarrow t} = \varphi_{\mathcal{K}}(y) - \sum_{w \in T_{(x)} \times_{S_{(s)}} t} \varphi_{\mathcal{K}}(w)$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

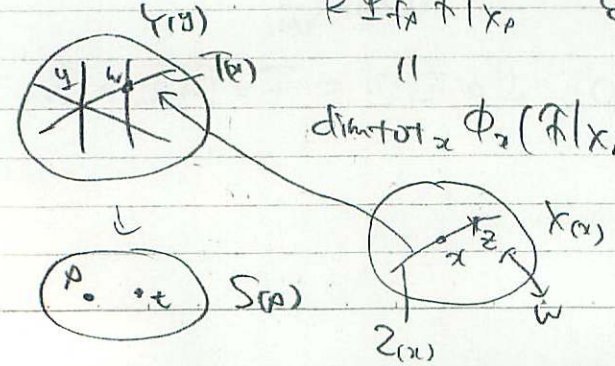
$$\underline{a_y(R\Psi_f \mathcal{F}|_{Y_s})} \qquad a_w(R\Psi_f \mathcal{F}|_{Y_t})$$

$\| \leftarrow$ base change と可換 (Orgogozo)

$$R\Psi_{f_s} \mathcal{F}|_{X_s}$$

$$\|$$

$$\operatorname{dimtot}_x \Phi_x(\mathcal{F}|_{X_s}, f_s) = \varphi_{\mathcal{F}, f}(x)$$



No.
DATE

u : Frac $\mathcal{O}_{Y_{t(w)}}$ の上にある geom. pt.

$$a_w(R\Psi_f\mathcal{F}|_{Y_t}) = \dim\mathrm{tot}(R\Psi_f\mathcal{F}|_{Y_t})_u - \dim(R\Psi_f\mathcal{F}|_{Y_t})$$

$$Y_{(w)} = x \overleftarrow{\times}_Y Y \qquad \quad \| \; (R\Psi_f\mathcal{F})_{x\leftarrow u} \qquad \| \; (R\Psi_f\mathcal{F})_{x\leftarrow u}$$

命題 1.2.2

$$\to (R\Psi_f\mathcal{F})_{x\leftarrow w} \to (R\Psi_f\mathcal{F})_{x\leftarrow u} \to \bigoplus_{z\mapsto w}(R\Phi_f\mathcal{F})_{z\leftarrow u} \to$$

$$z\leftarrow u \in X\overleftarrow{\times}_Y Y$$

これの dim
||
これの totdim

$$\Rightarrow a_w(R\Psi_f\mathcal{F}|_{Y_t}) = \sum_{z\mapsto u} \dim\mathrm{tot}(R\Phi_f\mathcal{F})_{z\leftarrow u}$$

∴ $\varphi_{\mathcal{F},f}(z) = \dim\mathrm{tot}(R\Phi_f\mathcal{F})_{z\leftarrow u}$ を示せばよい

$$\varphi_{\mathcal{F},f}(z) = \dim\mathrm{tot}\,\phi_z(\mathcal{F}|_{X_t}, f|_{X_t})$$

$$= \dim\mathrm{tot}(R\Phi_f\mathcal{F})_{z\leftarrow u}$$

base change と可換

$$f|_{X_t} : X_t \to Y_t$$
$$z \mapsto w \quad (z\in X_t,\ w\in Y_t)$$

//

残り: pull-back 公式の証明 ⇐ 分岐による CC の記述 $\dim X = 2$

$R\Psi_f\mathcal{F}$ に対する Milnor 公式

No.

DATE

4.4 Milnor公式の一般化

定義4.1 $f: X \to Y$ をk上有限型なschemeの射

$K: X \overleftarrow{\times}_Y Y$ 上のconstructible complex

$C \subset T^*Y$ closed conical

1. KがCに超局所台をもつとは

任意の $Y \xleftarrow[\text{étale}]{j} V \xrightarrow{g} Z$ に対し、
Z smooth curve

このpairがC-transversalならば、

$\overleftarrow{g}: X_V \overleftarrow{\times}_V V \to X_V \overleftarrow{\times}_Z Z$ がKの$X_V \overleftarrow{\times}_V V$への制限に関してloc. acyclic.

i.e. 各 $x \to X_V$ に対し、$x \overleftarrow{\times} V \to x \overleftarrow{\times}_Z Z$ が

$$\begin{array}{ccc} x & \to & X_V \\ \downarrow & & \downarrow \\ v \in & & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ z \in & & Z \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x \overleftarrow{\times} V & \to & x \overleftarrow{\times}_Z Z \\ \| & & \| \\ V_{(v)} & \xrightarrow{g_{(v)}} & Z_{(z)} \end{array}$$

$K|_{V_{(v)}}$ に関してloc. acyclic.

2. $C = \bigcup_a C_a$, $A = \sum_a m_a C_a$ がKの特性サイクルとは

任意の $Y \leftarrow V \xrightarrow{g} Z$ の孤立特性点uに対し、

Milnor公式

$$-\mathrm{dimtot}\,\phi_u(K, g_u) = (A, dg)_{T^*V, u}$$

が成り立つことをいう。($u \in V_{(v)}$ とみる。)

$x\in X$ ごとには $K|_{V(x)}$ constructible なので存在.

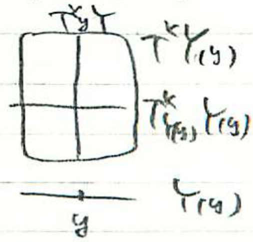
例1 Y: curve $\mathcal{F}/X$: constructible

$x \to X$ closed geom. pt $\qquad x\times_Y Y = Y_{(y)} \ni x$ $\quad y=f(x)$

$K = R\Phi_f \mathcal{F}$ $\quad K|_{Y_{(y)}}$: $Y_{(y)}$ 上の constructible cpx

$T^*Y_{(y)} = T^*Y\times_Y Y_{(y)}$ ⊃ conical closed subset は $T^*_{Y_{(y)}}Y_{(y)}$ と $T^*_yY_{(y)} = T^*_yY$ のみ

$CC(K|_{Y_{(y)}})$



$$CC(K|_{Y_{(y)}}) = -(\dim K_u\cdot[T^*_YY\times_Y Y_{(y)}] + \underbrace{a_y(K|_{Y_{(y)}})}_{=\ \mathrm{dimtot}\,K_u - \dim K_y}[T^*_yY])$$

$K = R\Phi_f\mathcal{F}$ とすると

$$= -(\dim\Phi_x(\mathcal{F},f)[T^*_YY\times Y_{(y)}] + \mathrm{dimtot}\,\Phi_x(\mathcal{F},f)[T^*_yY])$$

classical な Milnor 公式!

$CC(R\Phi_f\mathcal{F})$ のうち 0-section 以外の係数

No
DATE

定義 4.2. $f: X \to Y$ k 上の smooth scheme の射.

$C \subset T^*X$ closed conical, 各既約成分の次元 $= \dim X$

1. (f, C) について条件 (P), (F) を次で定める.

(P) $\forall P \subset df^{-1}(C) \subset X \times_Y T^*Y \to T^*X$ に対し,
(resp. (F)) irred comp. ($C \subset T^*X$)

$P \not\subset$ 0-section $\Rightarrow$ P の base Q は Y 上 proper
(resp. finite で $\dim P = \dim Y$

2. (P) がなりたつとき

$f_! C \subset T^*Y$ を $df^{-1}(C) \subset X \times_Y T^*Y \to T^*Y$

の像の閉包とする.

(F) がなりたつとき

$A = \sum m_a C_a$, $C = \bigcup C_a$ 既約成分 に対し,

$f_! A$ を A の交点理論の意味で

$T^*Y \leftarrow X \times T^*Y \to T^*X$ という代数的対応に

よる像として 0-section 以外と定義する.

例 Y: curve

(F) $\Leftrightarrow$ $f: X \to Y$ が孤立特性点しかもたない.

(問題)

そのとき

$$f_! A = \sum_u (A, df)_u [T^*_y Y], \ y = f(u)$$

No

DATE

命題 4.4. $f: X \to Y$ k 上の smooth scheme の射

$\mathcal{F}/X$ C に超局所台をもつ

1. (P) $\Rightarrow$ $R\Phi_f \mathcal{F}$ (on $X \overset{\leftarrow}{\times}_Y Y$) は $f_! C$ に弱超局所台をもつ

2. $C = \bigcup C_a$, $\dim C_a = \dim X$ とすると、

(F) $\Rightarrow$ $f_! CC(\mathcal{F})$ は 0-section を除き $R\Phi_f \mathcal{F}$ の特性サイクルと等しい.

注. Y: curve のときは 2 $\Leftrightarrow$ Milnor 公式.

証明は省略 (nearby cycle の formalism)

4.5. pull-back 公式の証明 ($\Leftarrow$ 分岐, $\dim X = 2$)

$f^! CC(\mathcal{F}) = CC f^* \mathcal{F}$, $f: W \to X$ properly C-trans
$C = SS(\mathcal{F})$

$i: W \to X$ smooth div. の imm. の場合に示せば十分

$i^! CC(\mathcal{F}) = CC\, i^* \mathcal{F}$ $\Leftarrow$ Milnor 公式で特徴づけられる

$\Updownarrow$

$i^! CC(\mathcal{F})$ が $i^* \mathcal{F}$ に対し, Milnor 公式をみたす

$f: W \to Y$ Y: curve, u: isol. char. pt

に対し、

$$CC(R\Psi_f i^* \mathcal{F}) = f_! i^! CC(\mathcal{F}) \quad (\text{0-section を除く})$$

を示せばよい。(∵ Milnor 公式)

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "h"'] & Z \end{tikzcd} \quad (\mathcal{F})$$

(F) dim 1　　dim 2

$$CC(R\Psi_f i^* \mathcal{F}) = CC(h^* R\Psi_g \mathcal{F})$$ — base change と可換。

$$f_! i^! CC(\mathcal{F}) = h^! g_! CC\mathcal{F}.$$

$$\underset{\text{命題4.3.2}}{=} h^! CC(R\Psi_g \mathcal{F})$$

$$CC(h^* R\Psi_g \mathcal{F}) \overset{?}{=} h^! CC(R\Psi_g \mathcal{F})$$

分岐記述