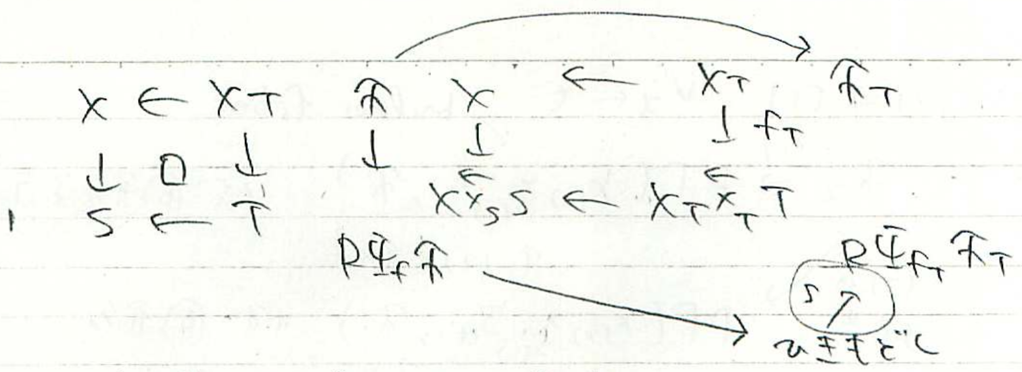


(命題3.2の証明のつづき)

11/20 $\chi(X,\mathcal{F}) - (CC(\mathcal{F}), T^*_X X) = -2(\mathrm{Art}\,\mathcal{F} - D(CC(\mathcal{F})))H.$

$= 2(\chi(H,\mathcal{F}|_H) - (i^! CC(\mathcal{F}), T^*_H H))$

‖ ←Hはcurve

$(CC(i^*\mathcal{F}), T^*_H H)$

$H \subset X$ surface
very ample

$= 2(CC(i^*\mathcal{F}) - i^! CC(\mathcal{F}), T^*_H H)$

$= 2\deg(D(CC(i^*\mathcal{F})) - D(i^! CC(\mathcal{F})))$

‖
$i^! CC'(\mathcal{F})$

$= -2((D(CC'(\mathcal{F})) - D(CC(\mathcal{F}))).H)$

‖
$\mathrm{art}\,\mathcal{F}$

local acyclicity と nearby cycle

補題1.1 次は同値

(1) $f: X \to S$ が $\mathcal{F}$ に関して loc. acyc.

(2) $pr_1^*\mathcal{F} \to R\Psi_f\mathcal{F}$ が同形で,
$R\Psi_f\mathcal{F}$ の構成は有限な base change と可換

No.

DATE

(2) ⇒ (1)　$\forall x \leftarrow t$ ← Milnor fiber

$\mathcal{F}_x \xrightarrow{(1)} R\Gamma(X_{(x)} \times_{S_{(s)}} t, \mathcal{F})$ が同形を示したい.

(2)の前半 ↘ ↑ (2)の後半

$R\Gamma(X_{(x)} \times_{S_{(s)}} S_{(t)}, \mathcal{F})$ は同形.

↑ Milnor tube

$T \subset S$　tの像の閉包　　$R\Gamma(X_{(x)} \times_{S_{(s)}} t, \mathcal{F})$

$$\begin{array}{ccc} X_T & \to & X \\ f_T \downarrow & \square & \downarrow f \\ T & \to & S \end{array}$$

$\| \; R\Psi_{f_T} \mathcal{F}|_{X_T}\,{}_{x \leftarrow t}$

↑ $S \leftarrow$ (2)の後半より同形

$R\Psi_f \mathcal{F}_{x \leftarrow t}$

$\| \; R\Gamma(X_{(x)} \times_{S_{(s)}} S_{(t)}, \mathcal{F})$

(1) ⇒ (2)の後半　SGA 4$\frac{1}{2}$ Th. finitude の App

$\forall x \leftarrow t$　$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\sim} R\Gamma(X_{(x)} \times_{S_{(s)}} S_{(t)}, \mathcal{F})$

$\Rightarrow pr_1^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} R\Psi_f \mathcal{F}$

$X \xrightarrow{f} S$ fin. type　$\mathcal{F}$: X上のsheaf

closed ∪ ↗ quasi-fin.

Z　　　　$f : X - Z \to S$ は $\mathcal{F}$ に関して loc. acyc.

$\left(\begin{array}{c} Z_s \subset X_s \to s \\ \text{有限} \end{array} \right)$　$\Rightarrow R\Phi_f \mathcal{F}$ は $Z \overleftarrow{\times}_S S$ に support をもつ

($X - Z \overleftarrow{\times}_S S$ 上では0)

命題1.2　S: noetherian　$f: X \to S$ 有限型.

$Z \subset X$ closed, S上 quasi-finite.

$\mathcal{F}$: X上 constructible な層,

$f: X - Z \to S$ は $\mathcal{F}|_{X-Z}$ に関して univ. loc. acyc.

1. (Orgogozo)　$R\Psi_f \mathcal{F}$, $R\Phi_f \mathcal{F}$ ($X \overleftarrow{\times}_S S$ 上) constructible

かつ その構成は $Z \overleftarrow{\times}_S S$ 上に supp をもつ.

2. $x \leftarrow t$: $Z \overleftarrow{\times}_S S$ の点　$s = f(x)$　　$S_{(s)} \leftarrow t \leftarrow u$ (specialization i.e.)

$$S_{(s)} \leftarrow t \leftarrow u, \quad t \to S_{(t)}, \quad u \to S_{(t)}, \quad S_{(t)} \to S_{(s)}$$

$$X \overleftarrow{\times}_S S \supset x \overleftarrow{\times}_S S = S_{(s)}, \quad t \to S_{(s)},\ u \to S_{(s)}$$

$$\begin{array}{ccccccc} Z & \leftarrow & Z_{(x)} & \leftarrow & Z_{(x)} \times_{S_{(s)}} t & \ni z \\ \downarrow & & \downarrow \text{fin.} & & \downarrow & \\ S & \leftarrow & S_{(s)} & \leftarrow & t & \leftarrow u \end{array}$$

$Z \overleftarrow{\times}_S S$ の点 $z \leftarrow u$.

$$\to R\Psi_f \mathcal{F}_{x \leftarrow t} \to R\Psi_f \mathcal{F}_{x \leftarrow u} \to \bigoplus_{z \in Z_{(x)} \times_{S_{(s)}} t} R\Phi_f \mathcal{F}_{z \leftarrow u} \to$$

dist. triangle

$t = s$ のとき　$Z_{(x)} \times_{S_{(s)}} s = x$.　(1点.)

$R\Psi_f \mathcal{F}_{x \leftarrow s} = \mathcal{F}_x$.

$$\to \mathcal{F}_x \to R\Psi_f \mathcal{F}_{x \leftarrow u} \to R\Phi_{x \leftarrow u} \to$$

constructible:

$^{\exists} X_a$ loc. closed による分割　$X = \coprod X_a$

S　　　　　　　　　　　　　　$S = \coprod S_a$

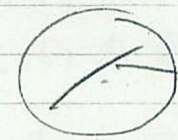
s.t. $\mathcal{F}|_{X_a \overleftarrow{\times}_S S_a}$ が loc. constant constructible (stalk が fin. gen. Λ-module) proper base change を $X \subset \bar{X}$ に使う

$\downarrow \swarrow$ proper

S

$\mathcal{G} = R\Psi_f \mathcal{F}|_{X \overleftarrow{\times}_S s}$　$S_{(s)}$ 上の constructible sheaf

$\quad\quad\quad \| \, S_{(s)}$　$Z_{(x)} \to S_{(s)}$ finite



$Z_{(x)} \to S_{(s)}$ の像

$t \to S_{(s)}$ が像に入っていなければ, $\mathcal{G}_t \to \mathcal{G}_u$ は同形.

$\mathcal{G}|_{S_{(s)} - (Z_{(x)} \text{の像})}$ は loc. constant
(closed)

4.2 Swan 導手の半連続性 (Deligne–Laumon)

S: noetherian　$f: X \to S$ flat curve
(flat of fin. type, rel. dim 1)

$Z \subset X$ closed, S上 quasi-fin.

$X - Z$ は S上 smooth

$\mathcal{F}$: X上 constructible, $\mathcal{F}|_{X-Z}$ は loc. const.

$s\to S$ geometric pt. , $k(s)$：代数閉

$x\in(Z_s\subset)X_s$　X_s：$k(s)$上の代数曲線
closed pt.

$\mathcal{O}_{X_s,(x)}$ の正規化 $=\prod A_i$　A_i：剰余体 $=k(s)$
hensel d.v.r.
$K_i=\mathrm{Frac}\,A_i$

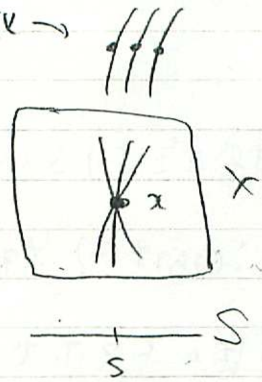
Artin 導手 (Λは体とする)

$a_x(\mathcal{F}|_{X_s})=\sum_i \dim\mathrm{tot}_{K_i}\mathcal{F}|_{\bar{K}_i}-\dim\mathcal{F}_x$

$\mathcal{F}|_{\bar{K}_i}$：有限次元Λ-vect.sp.
$\mathrm{Gal}(\bar{K}_i/K_i)$が作用

$\dim\mathrm{tot}_{K_i} = \dim + \mathrm{Sw}_{K_i}$

正規化→



$\varphi_{\mathcal{F}}(x)=a_x(\mathcal{F}|_{X_s})$　Z上の関数
(X上の関数, 台$\subset Z$)

命題 2.1 (Deligne–Laumon)

1. $R\Psi_f\mathcal{F}$, $R\Phi_f\mathcal{F}$ constructible
base change と可換

$\dim R\Phi_f\mathcal{F}_{x\leftarrow t}=\delta(\varphi_{\mathcal{F}})(x\leftarrow t)$

が成り立つ, $\varphi_{\mathcal{F}}$: constructible

2. $j: U=X-Z\hookrightarrow X$, $\mathcal{G}$: loc. const / U, $\mathcal{F}=j_!\mathcal{G}[1]$
ならば $\varphi_{\mathcal{F}}$ 増加で 平坦 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$: univ. loc. acyc.
(増加: $\delta(\varphi_{\mathcal{F}})\geq 0$)

No.
DATE

Laumon.

$f|_Z : Z \to S$ fin. ⇒ $f_*\varphi_{\mathcal{F}}$ 上半連続 ($\Leftarrow \varphi_{\mathcal{F}}$: 増加 + const)

$(f: X \to S$ smooth$)$ $f_*\varphi_{\mathcal{F}}$ 局所定数 ⇔ $\varphi_{\mathcal{F}}$ 平坦

証明

1. $X-Z \to S$: smooth, $\mathcal{F}|_{X-Z}$: loc. const

Z ↑ S上flat

⇒ $X-Z \to S$ は $\mathcal{F}|_{X-Z}$ に関して univ. loc. acyc.

(smooth morph の loc. acyclicity)

⇒ constructible & base change と可換

Orgogozo

これは base change との可換性より S が dvr に帰着

これと $R\Phi_f\mathcal{F}$: const ⇒ $\delta(\varphi_{\mathcal{F}})$: const ⇒ $\varphi_{\mathcal{F}}$: const

この証明: devissage で2の仮定の下で示せばよい.

2. S : d.v.r に帰着.

$R^q\Phi_f\mathcal{F}_{x\in t} = 0 \quad (q \neq 0)$

$\delta(\varphi_{\mathcal{F}}) \geq 0 \Rightarrow \varphi_{\mathcal{F}}$ 増加

$= 0 \Leftrightarrow \varphi_{\mathcal{F}}$ 平坦

⇕

(univ.) loc. acyc.

↑

今は base change と可換がわかっている.

1の=: X: properだったら

$$\sum_{x\in X_s} \dim R\Phi_x\mathcal{F}_{x\in t} = \sum_{x\in X_s} \delta(-\varphi_{\mathcal{F}}^{-1})(x\in t)$$

⇑ G-O-S を X_s, X_t に適用

- Deligne deformation + compact化 ⇝ 実質的に1つにする
- Kato 問題の点以外の等式を示す
  stable reduction thm と blowup が必要.
  ↕
  公式を一般化し, fiber に沿った分岐を許す

§3 Swan導手の平坦性 (平坦 ⟺ univ. loc. acyc. の高次元化

$$\begin{array}{ccc} Z \overset{\text{closed}}{\subset} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & p \searrow^{\text{of fin.}} & \swarrow g \ \text{sm. curve} \\ & S & \end{array}$$

$Z \to S$: q-fin.

$\mathcal{F}$: X上のconstructible層.
$f: X - Z \to Y$ は $\mathcal{F}$ に関して univ. loc. acyc.

$s \to S$ geom. pt $k(s)$ は代数閉

$$\begin{array}{ccc} x \in Z_s \subset X_s & \xrightarrow{f_s} & Y_s \ni y = f_s(x) \\ \searrow & & \swarrow \ \text{sm. curve} \\ & \operatorname{Spec} k(s) & \end{array}$$

Z_s: 有限

$\Phi_x(\mathcal{F}|_{X_s}, f_s)$: 有限次元$\Lambda$-vect. sp.
$Gal(\bar{K}_y/K_y)$ が作用
$K_y = \operatorname{Frac} \mathcal{O}_{Y_s,(y)}$

⇝ $\dim\mathrm{tot}\, \Phi_x(\mathcal{F}|_{X_s}, f_s)$ が定義される
‖
$\varphi_{\mathcal{F},f}(x)$: Z上の関数

No.

DATE

$Z \to Y$: 8-fin.

$R\Psi_f \mathcal{F}$, $R\Phi_f \mathcal{F}$ の構成は base change と可換

$$u = \mathrm{Spec}\,\bar{k}_y \longrightarrow Y_s \to Y \qquad \begin{matrix} u \to y \\ \uparrow \\ x \end{matrix}$$

$$\searrow Y_{s(y)} \nearrow$$

$$Y_{s(y)} = x \underset{Y_s}{\times} Y_s$$

$$\phi_x(\mathcal{F}|_{X_s}, f_s) = R\Phi_f \mathcal{F}_{x\in u} = (R\Phi_f \mathcal{F}|_{Y_s})_{x\in u}$$

↑ base change と可換 $(Y \leftarrow Y_s)$

$$\to pr^*\mathcal{F}|_{x\in u} \to (R\Psi_f \mathcal{F}|_{Y_s})_{x\in u} \to (R\Phi_f \mathcal{F}|_{Y_s})_{x\in u} \to$$

$$pr^*\mathcal{F}|_{x\in u} = (R\Psi_f \mathcal{F}|_{Y_s})_{x\in y} = \mathcal{F}_x$$

$$\varphi_{\mathcal{F},f}(x) = a_y\left(R\Psi_f \mathcal{F}|_{x \underset{Y_s}{\times} Y_s}\right)$$