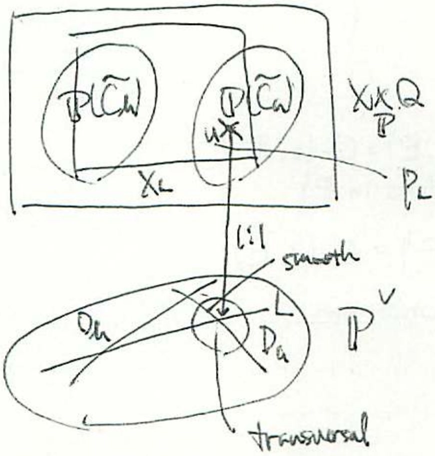
$CC\,\mathcal{F} = \sum m_a C_a$　m_aの決め方



isolated
$p_L : X_L \to L$ の char. pt. u

uでMilnor formulaが成立するようにm_aを定める.

$$\left(\mathbb{P}(\widehat{C}_a), X_L\right)_{X \times_{\mathbb{P}} Q, u}$$
$$= \left(p^\vee_* \mathbb{P}(\widehat{C}_a), L\right)_{\mathbb{P}^\vee, u}$$
$$= [\xi_a : \eta_a]_{\text{insep}} \underbrace{(D_a, L)_{\mathbb{P}^\vee, u}}_{\overset{\shortparallel}{1} \text{ (transversal)}}$$

$\mathbb{P}(\widehat{C}_a)$ の gen. pt. ξ_a
D_a　〃　η_a

$$A = \sum m_a C_a$$
$$(A, dp_L^{\circ})_{T^*X, u} = \left(\mathbb{P}(\widehat{A}), X_L^{\circ}\right)_{X \times_{\mathbb{P}} Q, u}$$
$$= m_a \left(\mathbb{P}(\widetilde{C}_a), X_L^{\circ}\right)_u$$
$$= m_a [\xi_a : \eta_a]_{\text{insep}}.$$

Milnor formulaが成立するようにm_aを定めるには

$$-\dim\text{tot}\ \varphi_u(\mathcal{F}, p_L^{\circ}) = m_a [\xi_a, \eta_a]_{\text{insep}}.$$

でないといけない.

よって.　$m_a = -\dfrac{\dim\text{tot}\ \varphi_u(\mathcal{F}, p_L^{\circ})}{[\xi_a : \eta_a]_{\text{insep}}}$　でないといけない.

uniqueness と $m_a \in \mathbb{Z}[1/p]$ はわかった.

残るは.

- m_aは L, uによらないか.　← pencil の univ. family
- 一般の射についても Milnor formula を示せるか?

$\Uparrow$

Swan conductor
の flatness

No. 1

Date 2015. 10. 16

universal family of lines in $\mathbb{P}^\vee$

$f : X \to Y$ isolated char. pt.

$p_L^\circ : X_L^\circ \to L$ pencil で定まる射

$$\begin{tikzcd} X_L^\circ \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[d, phantom, "\cap"] \\ X \times_{\mathbb{P}} Q \arrow[r] & \mathbb{P}^\vee \end{tikzcd}$$

$\mathbb{P}^\vee = \mathbb{P}(E) = \{\text{lines} \ni 0 \text{ in } E\} = Gr(1.E) = Gr(0.\mathbb{P}^\vee)$

$= \{\text{hyperplanes in } \mathbb{P}\}$

$\mathbb{G} = Gr(1.\mathbb{P}^\vee) = \{\text{lines in } \mathbb{P}^\vee\} = \{\text{planes} \ni 0 \text{ in } E\} = Gr(2.E)$

Grassmann

$= \{\text{codim 2 linear subsps. in } \mathbb{P}\}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \mathbb{G} \arrow[d, phantom, "\ni"] \\ \mathbb{P}^\vee \times \mathbb{G} & L \end{tikzcd}$$

universal line $\mathbb{P}^1$-bdle

「L の fibre は L という line」

$\mathbb{D} = \{(\underset{\text{hyperplane} \subset \mathbb{P}}{H}.\underset{\text{line} \subset \mathbb{P}^\vee}{L}) \mid E_H \subset E_L\}$ flag variety

$H \updownarrow$ 1-dim'l subsp. $E_H \subset E$; $L \updownarrow$ 2-dim'l subsp. $E_L \subset E$

「H と E_H は 後では 区別しない」

$= Fl(1.2.E)$

の fiber は、

$A_L = \bigcap_{H \in L} H$

$= H_0 \cap H_\infty$

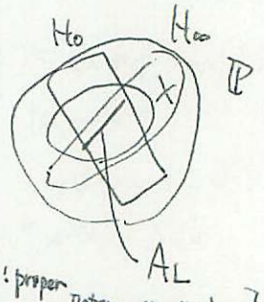
(H_0, H_∞)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \mathbb{G} \arrow[d, phantom, "\ni"] \\ \mathbb{P} \times \mathbb{G} & L \end{tikzcd}$$

universal linear subvar. of codim 2

この手の話を たり前のものとして 降 進む」

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathbb{P}(X \times_{\mathbb{P}} T^*\mathbb{P}) \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & (X \times \mathbb{G})^\circ \arrow[d, phantom, "\cap"] & & \\ \mathbb{P}(\hat{C}) \subset & X \times_{\mathbb{P}} Q \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (X \times \mathbb{G})' \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & X \times \mathbb{G} \supset X \times_{\mathbb{P}} \mathbb{A} \arrow[d] & X_L \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cup"] & X \\ & \mathbb{P}^\vee & \mathbb{D} \arrow[l] \arrow[r] & \mathbb{G} & X_L^\circ \arrow[d] & \\ & & & & L \arrow[r, dash] & L \end{tikzcd}$$



$A_L \cap X$: proper intersection なら blow up

$X \times \mathbb{G} \subset \mathbb{P} \times \mathbb{G} \supset \mathbb{A}$

共通部分 $= X \times_{\mathbb{P}} \mathbb{A}$

universal codim 2 linear section

$X_L^\circ \simeq X \setminus (X \cap A_L)$

$(X \times \mathbb{G})'$ は $X \times \mathbb{G}$ を $X \times_{\mathbb{P}} \mathbb{A}$ で blow-up したもの（演習問題）

$$\begin{array}{ccc} (X \times \mathbb{G})' & & X \times \mathbb{G} \\ \cup & & \cup \\ (X \times \mathbb{G})^\circ & \xrightarrow{\sim} & (X \times \mathbb{G})^\circ = (X \times \mathbb{G}) \setminus (X \times_{\mathbb{P}} \mathbb{A}) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} (X\times\mathbb{G})^\circ \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbb{D} \arrow[dl] \\ & \mathbb{G} & \end{tikzcd}$$

$p_L^\circ : X_L^\circ \to L$ の universal family

$p_L^\circ : X_L^\circ \to L$ が C-transversal でないところ $=$ $\mathbb{P}(\widehat{C})$ との共通部分 (∵先週の Prop.)

「これが孤立点になるところをみたい」

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}(\widehat{C}) \arrow[d, phantom, "\cap"] & & \text{逆像} \arrow[ll] \arrow[d, phantom, "\cap"] \arrow[dd, bend left=60, "\text{quasi-finite になるところ}"] \\ X\times_{\mathbb{P}} Q & (X\times\mathbb{G})' \arrow[l] \arrow[r, phantom, "\supset"] & (X\times\mathbb{G})^\circ \arrow[d] \\ & & \mathbb{G} \end{tikzcd}$$

$(X\times\mathbb{G})^\nabla$: $(X\times\mathbb{G})^\circ$ の開集合で $\mathbb{P}(\widehat{C})$ の逆像 $\mathbb{Z}(\widehat{C})$ $(\subset (X\times\mathbb{G})^\nabla)$ が $\mathbb{G}$ 上 quasi-fin. となる最大のもの とする

$$\begin{tikzcd} & & X\times\mathbb{G} \arrow[d, phantom, "\cup"] & \\ (u,L) \arrow[r, phantom, "\in"] & \mathbb{Z}(\widehat{C}) \arrow[r, phantom, "\overset{\text{closed}}{\subset}"] \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\text{quasi-fin.}"] & (X\times\mathbb{G})^\nabla \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{D} \arrow[dl, "\mathbb{P}^1\text{-bdle}"] \\ X & & \mathbb{G} \arrow[d, phantom, "\ni"] & \\ & & L & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \{\text{isol. char. pts.}\} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, phantom, "\ni"] & X_L^\nabla \arrow[rr, "p_L^\circ\text{の制限}"] \arrow[dr] & & L \arrow[dl] \\ u & & \{L\} & \end{tikzcd}$$

「この図式が三角形だから $(X\times\mathbb{G})^\nabla$ という記号にした」

$(X\times\mathbb{G})^\nabla \to \mathbb{G}$ は $p^*\mathcal{F}$ に関して locally acyclic (generic local acyclicity SGA $4\frac{1}{2}$)

$(X\times\mathbb{G})^\nabla \to \mathbb{D}$ は $p^*\mathcal{F}$ に関して $\mathbb{Z}(\widehat{C})$ の外では loc. acyclic

よって、Prop. 3.3 より

$\mathbb{Z}(\widehat{C})$ 上 定義された関数

$\varphi_{\mathcal{F}} = \operatorname{dimtot} \varphi_u(\mathcal{F}, p_L^\circ)$

は $\mathbb{G}$ 上 平坦で constructible

$C = \bigcup_a C_a$ 既約成分 $\mathbb{P}(\widehat{C}) = \bigcup_a \mathbb{P}(\widehat{C}_a)$ 既約成分

$\mathbb{Z}(\widehat{C}) = \bigcup_a \mathbb{Z}(\widehat{C}_a)$ 〃

$\varphi_{\mathcal{F}}$ は各 $\mathbb{Z}(\widehat{C}_a)$ の dense open で定数関数 その値を φ_a とおく.

def. 4.6

$$CC^E_C\mathcal{F} = -\sum_a \overbrace{\frac{\varphi_a}{[\xi_a:\eta_a]_{\mathrm{insep}}}}^{\in\mathbb{Z}[1/p]}[C_a]$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(\tilde{C}_a) \arrow[r] \arrow[d, phantom, sloped, "\supset"] & D_a \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbb{P}^\vee \\
X\times_{\mathbb{P}}Q & &
\end{tikzcd}$$

「先週の def. は
この def. の "dense open"
の中の点を使って def. した
と思えば、これと一致する」

2.5 Milnor 公式の証明 pencil の場合

Prop. 5.1 $i: X \hookrightarrow \mathbb{P}$ (E) & (C) を満たすならば、

$p^\circ_L: X^\circ_L \to L$ の孤立特性点 u について

「L は任意」

Milnor 公式

$$-\mathrm{dimtot}\,\varphi_u(\mathcal{F}, p^\circ_L) = (CC^E_C\mathcal{F}, dp^\circ_L)_{T^*X,u}$$

がなりたつ。

(pf.) 両辺を $\mathbb{Z}(\hat{C})$ の関数と考える。
等式は $\mathbb{Z}(\hat{C})$ の dense open 上で成立 (先週+定義)
左辺は $\mathbb{G}$ 上平坦なので、次を示せばよい

Lem. 5.2 右辺 $(\underbrace{CC^E_C\mathcal{F}}_{\shortparallel\, A}, dp^\circ_L)_{T^*X,u} = (\mathbb{P}(\hat{A}), X_L)_{X\times_{\mathbb{P}}Q,u}$

も $\mathbb{G}$ 上平坦な $\mathbb{Z}(\hat{C})$ 上の関数

Lem. 5.3 (演習問題) $Z \to S$ Noetherian schemes の quasi-fin 射
φ: S 上平坦な Z 上の関数とする。
φ が Z の dense open 上 0 なら $\varphi = 0$

「$\overset{\varphi}{\overset{\shortparallel}{(\mathrm{LHS})-(\mathrm{RHS})}}$ に適用する」
「Noe. ind. で示す」

(Lem. 5.2 の pf.)

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z}(\hat{A}) & & \\
 & \mathbb{P}(\hat{C}) \arrow[d, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathbb{Z}(\hat{C}) \arrow[l] \arrow[d, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[rrddd, bend left, "\text{quasi-fin.}"] & & \\
X_L \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dd] \arrow[ddr, phantom, "\square"] & X\times_{\mathbb{P}}Q \arrow[dd] & (X\times\mathbb{G})^\circ \arrow[l] \arrow[dd] \arrow[r, phantom, "\supset"] & X^\circ_L \arrow[d] & \\
 & & & L & \\
L \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbb{P}^\vee & \mathbb{D} \arrow[l] \arrow[rr] \arrow[ur, phantom, sloped, "\supset"] & & \mathbb{G}\ni\{L\}
\end{tikzcd}$$

$$(\mathbb{P}(\hat{A}), X_L)_{X\times_{\mathbb{P}}Q,u} = \left(\left(\mathbb{Z}(\hat{A})\times_{\mathbb{G}}\{L\}\right)_{(u,L)} \text{の長さ}\right)$$

Lem. 5.4 $\pi: X \to S$ Noetherian schemes の有限型の射
$Z \subset X$: closed, quasi-fin. over S
A: $\mathcal{O}_X$-mod. の複体 $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_X)$ $\mathcal{H}^q(A)$: $\mathcal{O}_X$-coh. 有限個を除き 0
$\mathrm{Supp}\,A \subset Z$ (i.e. $\forall q$. $\mathrm{Supp}\,\mathcal{H}^q(A) \subset Z$)
A は $\mathcal{O}_S$ 上 tor 次元有限とする (S が正則 (e.g. $S = \mathbb{G}_a$) なら OK) →

この時。$\varphi_A(z) = \dim_{k(s)} (A_z \otimes^L_{\mathcal{O}_{S,(s)}} k(s))$ は S 上平坦

Z上の関数　$s = \pi(z)$　$\uparrow \mathcal{O}_{X(z)}$ strict localization

(pf) 主張は $\underbrace{\text{étale local}}_{Z上}$ なので Z は S 上 fin. としてよく。$Z \times_S s = \{z\}$ としてよい。

$\underline{R\pi_* A}$: $\mathcal{O}_S$ 加群の perfect complex

有限生成自由 $\mathcal{O}_S$ 加群の複体と思ってよい

右辺はその階数の交代和。　//

「『平坦な加群で def. したから関数も平坦』という pf. 語呂合わせ」

2.6 消失輪体の安定性

$$-\dim\mathrm{tot}\, \varphi_u(\mathcal{F}, f) \overset{?}{=} (CC(\mathcal{F}, df))_{T^*X,u}$$

右辺は f を少しずらしても変わらない

$g \equiv f \mod \mathfrak{m}_u^N$

左辺も同じ性質を満たすことを示し、それを使って等式を示す。

「数学で時々あること：
・証明したいことの帰結を調べていたら元の主張が示せてしまった。」

Prop. 6.1　$\mathcal{F}$: C に超局所台を持つとし。

$f: X \to \underset{\text{curve}}{Y}$　u で孤立特性点を持つとする。

この時。自然数 $N \geq 2$ で。

$g: X \to Y$ が $g \equiv f \mod \mathfrak{m}_u^N$ なら

(1) $g: X \to Y$ も u で isol. char. pt.

(2) $\dim\mathrm{tot}.\, \varphi_u(\mathcal{F}, f) = \dim\mathrm{tot}\, \varphi_u(\mathcal{F}, g)$

(3) $(C_a, df)_{T^*X,u} = (C_a, dg)_{T^*X,u}$

を満たすものがある。

$Z \subset X$: closed subsch.

$f \equiv g \mod I_Z$ とは。$f|_Z = g|_Z$ のこと

$$\begin{tikzcd} C = \bigcup C_a \subset T^*X \arrow[d] \\ X \arrow[u, bend right, "df"'] \end{tikzcd}$$

$df^*(C_a) = C_a \times_{T^*X, df} X \ni u$ 孤立点。

$\mathcal{O}_{df^*(C_a),u}$: 長さ有限な $\mathcal{O}_{X,u}$ の商

$\exists N.$ $\mathfrak{m}_u^{N-2}$ で消える

「この N が条件を満たすことを示す」

$$\begin{tikzcd} T^*X \arrow[d] \\ X \arrow[u, bend right, "dg"'] \end{tikzcd}$$

$dg \equiv df \mod \mathfrak{m}_u^{N-1}$

$\Rightarrow dg^*(C_a)$ で u は孤立点で $\mathcal{O}_{\ldots}$ は $\mathfrak{m}_u^{N-2}$ で消える。

Lem. 6.2 ($\mathcal{O}_{X,u}$) A : Noe. local ring. M : 有限生成 A 加群

$(N-1 \to) n \geq 1$　$\mathfrak{m}^{n-1}M \subset \mathfrak{m}^n M$ ならば $\mathfrak{m}^{n-1}M = 0$

「$\mathfrak{m}^{n-1}M$ に中山の補題を使う。」

「2つのものが等しいことをいうのにfamilyを使う」

Lem. 6.2 から (1). (3) は従う.

(2) は homotopy を構成して 2.5節と同じ議論

「coh. shf. の話 (1). (3) は
簡単だった. あとは
étale shf. の話 ((2)).」

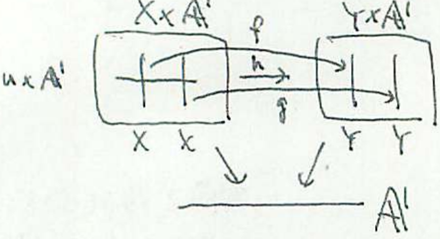
$Y = \mathbb{A}^1$ としてよい

$h: \underset{\underset{u}{\cup}}{X} \times \mathbb{A}^1 \to Y \times \mathbb{A}^1$

f と g をつなぐ homotopy を $h = (1-t)f + tg$ で定義

h は $u \times \mathbb{A}^1$ の nbd. で $u \times \mathbb{A}^1$ を除き. $\mathrm{pr}_1^* C$-transversal

(isol. char. pt. の技)　Lem. 6.2



$$\begin{tikzcd} Z(C) \arrow[r, phantom, "\subset"] & (X \times \mathbb{G})^{\nabla} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{P} \arrow[d] \\ & & \mathbb{G} \end{tikzcd}$$

- $X \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ は $p^* \mathcal{F}$ について loc. acyclic (gen. local acy.)
- $h: X \times \mathbb{A}^1 \to Y \times \mathbb{A}^1$ は 〃 $u \times \mathbb{A}^1$ の nbd. で $u \times \mathbb{A}^1$ を除き loc. acy.

Swan cond. の平坦性より　$h_t: X \to Y$

dimtot $\varphi_u(\mathcal{F}, h_t)$ は t の関数として $\mathbb{A}^1$ 上平坦

$u \times \mathbb{A}^1 \rightrightarrows \mathbb{A}^1$ étale より 平坦 = loc. const.

$\mathbb{A}^1$: conn. より const.　$t=0.1$ の値は等しい. //