10/2 2. 特性サイクル

X : smooth$/k$ 　 k : 完全体

Xの既約成分の次元はすべてn

$C \subset T^*X$ conical closed subset

$C = \bigcup_a C_a$ 既約成分 $\forall a$ $\dim C_a = n$

定義 1.1 $f : X \to Y$, Y : smooth curve$/k$

$u \in X$ closed pt が C に関して孤立特性点であるとは、$f|_{X-\{u\}} : X - \{u\} \to Y$ が $C_{X-\{u\}} = C \cap T^*(X-\{u\})$-横断的であることをいう。

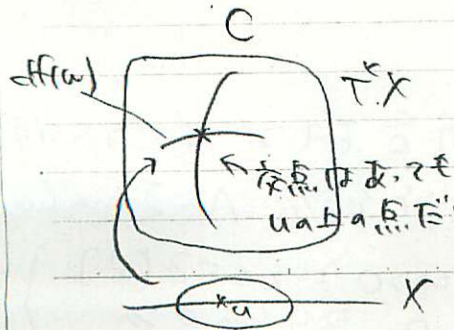
例 $C = T^*_X X$ 0-section のとき

uが孤立特性点 $\Leftrightarrow$ uが孤立特異点

$A = \sum m_a C_a$ 1次結合 $m_a \in \mathbb{Q}$

$v = f(u) \in Y$ 　 ω : vの近傍でのT^*Yのbasis

$df(\omega)$ uの近傍でのT^*Xのsection $\leftarrow \dim 2n$



u : isolated char pt

$\Rightarrow$ $C \cap df(\omega)$ はuの近傍ではuの外でϕ

$\dim n$ 　 $\dim n$

(点だけ or ϕ ($= \dim 0$))

i.e. proper intersection

⇝ 交点数 $(A, df(\omega))_{T^*X,u} \in \mathbb{Q}$ が定義される

conical　　　　　　　　　　　　uの近傍で考える

$\mathbb{G}_m$の作用で不変

⇒ ωのとり方によらない

⇝ $(A, df)_{T^*X,u} = (A, df(\omega))_{T^*X,u}$ が定義される.

例1 (問題)　$C = T^*_X X$, $A = [T^*_X X]$ のとき

$x_1, \dots, x_n$: $m_u \subset \mathcal{O}_{X,u}$ の生成元

$Y = \mathbb{A}^1$, $f : X \to \mathbb{A}^1 \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$

$$(A, df)_{T^*X,u} = \mathrm{length}_{\mathcal{O}_{X,u}} \mathcal{O}_{X,u} / \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Milnor 数

定理 2.1　X/k smooth, dim n　k : perfect

$\mathcal{F}$: X上の constructible sheaf (tor 次元有限, $\Lambda = \Lambda_0$ 有限体)

$C \subset T^*X$ conical closed

$= \bigcup_a C_a$　$\forall a$　$\dim C_a = n$

仮定　$\mathcal{F}$はCに超局所台をもつ. ($C \supset SS(\mathcal{F})$)

このとき, 次の条件をみたす1次結合 $A = \sum m_a C_a$ がただ1つ存在する. (char $k = p > 0$ なら $m_a \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$, 0 なら $m_a \in \mathbb{Z}$)

NO.

DATE

$\forall$ closed pt

$$\begin{array}{ccc} u \in U & \xrightarrow{f} & Y \\ \text{étale } j \downarrow & & \uparrow \\ X & & \text{smooth curve} \end{array}$$

uがj^*Cに関してfの孤立特性点ならば

$$-\mathrm{dimtot}\,\Phi_u(j^*\mathcal{F}, f) = (j^*A, df)_{T^*U, u}$$

↑ Milnor公式

が成り立つ。//

vanishing cycle $k = \bar{k}$

- nearby cycle $\Psi_u(j^*\mathcal{F}, f) = R\Gamma(U_{(u)} \times_{Y_{(y)}} \bar{\eta}_y, \mathcal{F})$

↑ Milnor fiber.

$\to Y_{(y)} = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}^{s.h}_{Y,y}$ (st. loc. dvr.)

gen. pt η_y ← $\bar{\eta}_y$ geom. gen. pt

↑ $\mathrm{Spec}(K_y)$

↑ loc. field

剰余体代数閉

$$\mathcal{F}_u \to \Psi_u(j^*\mathcal{F}, f) \to \Phi_u(j^*\mathcal{F}, f) \to$$ distinguished triangle

$\circlearrowleft$ $\circlearrowleft$ $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}_y/\eta_y)$

$\mathrm{dimtot} = \mathrm{dim} + \mathrm{Sw}$

$$\mathrm{Sw}\,\Phi_u(j^*\mathcal{F}, f) = \sum_q (-1)^q \mathrm{Sw}_y \varphi^q$$

No.
DATE

例 $\mathcal{F}=\Lambda$　$A=(-1)^n[T^*_X X]$ の場合

Milnor 公式　Deligne SGA 7 II Exp XVI

系 2.2　A は $C\supset SS(\mathcal{F})$ をみたす C にはよらない.
$$\underset{C_0}{\overset{}{SS(\mathcal{F})}} \;\; (SS(\mathcal{F}) = C_0)$$

証明　$A\cdots C$, $A\cdots C_0$ のとき $A=A_0$ をいえばよい.

C に関して予備立特性的 ⇒ C_0 についてもそう

A_0 は A について条件をみたす. 一意性より $A=A_0$ //

定義 2.3

・定理 2.1 の A を $\mathcal{F}$ の特性サイクルとよび,

$\mathrm{char}\,\mathcal{F}$ とかく.

さっきの例　$\mathrm{char}\,\Lambda=(-1)^n[T^*_X X]$

予想 2.4　$m_a\in\mathbb{Z}$

$\underline{\dim X\le 1}$, $\mathcal{F}$: tame, $\dim X=2$, rank 1 では OK

Hasse-Arf

No.
DATE

定理2.1の証明の準備

2.3 Swan 導手の平坦性

$\varphi : X \to \mathbb{Q}$ 有理数値の関数を
$\quad x \in \quad\;\; \cup$

$\bar{x} \in \{X$の geom. pt$\}/\sim$ の関数と思う
(トポス X_{et} の点)

$X \to S$ noether スキームの有限型な射
準有限とする

定義 3.1
φの差分 (derivative) $\delta(\varphi)$ を

$\dfrac{x \leftarrow t}{/}$ $\left(\begin{array}{l} x : X\text{の geom. pt}, \ s = f(x) : S\text{の geom. pt} \\ S_{(s)} \leftarrow t \ \text{geom. pt} \end{array}\right)$

$\left(X \overleftarrow{\times}_S S \text{ vanishing topos} \right.$
$\left. \text{の点} \right)$

$X \to S$: étale とすると.
$\delta(\varphi) = 0 \Longleftrightarrow \varphi$ は specializat で不変
$\left(X_{(x)} \times_{S_{(s)}} t = t\right) \Longleftrightarrow \varphi$: loc. cons

の関数として

$$\delta(\varphi)(x \leftarrow t) = \varphi(x) - \sum_{z \in X_{(x)} \times_{S_{(s)}} t} \varphi(z)$$

有限.
finite　Milnor fiber
$\Uparrow$
$(X \to S$: quasi-fin$)$

と定義.

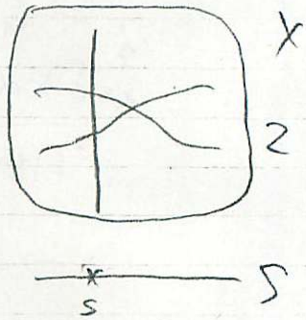
$\delta(\varphi)=0$ のとき φはS上平坦

$\delta(\varphi)\geq 0$ のとき 〃 増加

$X \to S$: smooth curve

closed $\cup$ $\nearrow$ quasi-fin.

Z



$\mathcal{F}$: X上のconstructible complex

$X-Z$上 loc. const

$\rightsquigarrow \varphi_{\mathcal{F}} : Z \to \mathbb{Z}.$

s : Sの geom. pt で剰余体は代数閉

x : $Z\times_S s$ の点.. (Zの geom. pt)

$\subset X_s$ fin. subset.

$\mathcal{F}|_{X_s}$ $\quad X_s = X\times_S s$: geom. fiber

$\uparrow$

代数閉体 $k(s)$上の smooth 代数曲線

$$\varphi_{\mathcal{F}}(x) = a_x(\mathcal{F}|_{X_s}) = \mathrm{dimtot}(\mathcal{F}_{\bar\eta}) - \dim \mathcal{F}_x$$

$$\left(X_s \leftarrow X_{s,(x)} \leftarrow \frac{x}{\eta}\right)$$

定理 3.2 (Deligne-Laumon) $\varphi=\varphi_{\mathcal{F}}$

1. φはZ上 constructible な関数で、

$f: X\to S$ が$\mathcal{F}$に関して loc. acyc ならば

φはS上平坦である.

2. $\mathcal{F} = j_! \mathcal{G}$ $j : X - Z \hookrightarrow X$ open imm.

$\mathcal{G}$ は $X - Z$ 上の locally constant sheaf

$Z : S$ 上平坦 とすると, φ は S 上 減少であり,

φ が S 上平坦 $\Longleftrightarrow$ f が $\mathcal{F}$ に関して loc. acyc. //

φ が constructible とは

$\exists\ Z = \coprod_{有限} Z_a$ $Z_a \subset Z$ loc. closed

s.t. $\varphi|_{Z_a}$: constant.

定理の証明はいずれ

1の後半の下線部 … Swan 導手の平坦性

高次元化 … 定式化 $\Rightarrow$ 定理2.1の証明

さっき
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, phantom, "\overset{\text{closed}}{\subset}"] \arrow[dr, "q\text{-}f"'] & X \arrow[d, "\leftarrow \text{smooth curve}"] \\ & S \end{tikzcd}$$

今度は
$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, phantom, "\overset{\text{closed}}{\subset}"] \arrow[drr, bend right, "q\text{-}f"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p"] & Y \arrow[d, "\swarrow \text{smooth curve}"] \\ & & S \end{tikzcd}$$

$\mathcal{F}$: X 上の constructible complex

$f|_{X-Z} : X - Z \to Y$ は $\mathcal{F}|_{X-Z}$ に関して loc. acyc

$p : X \to S$ は $\mathcal{F}$ に関して loc. acyc.

No.

DATE

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & Y \arrow[d] \\ & S \end{tikzcd}$$

$S \ni s$ geom. pt 剰余体 $k(s)$ は代数閉

fiber

$$\begin{tikzcd} & X_s \arrow[r, "f_s"] \arrow[dr] & Y_s \arrow[d] \\ Z_s \arrow[ur, phantom, "\subset"] & & k(s) \end{tikzcd}$$

$\uparrow$
有限

$X_s \xrightarrow{f_s} Y_s$ smooth 代数曲線

$x \in Z_s$ $\quad \Phi_x(\mathcal{F}|_{X_s}, f_s)$ vanishing cycle complex

($X_s - Z_s$ では $0 \Leftarrow f|_{X-Z}$ の loc. acyclicity)

$\varphi(x) = \mathrm{dimtot}\, \Phi_x(\mathcal{F}|_{X_s}, f_s)$ で Z 上の関数 φ を定める

定理3.2 の φ は $X=Y$ の場合にあたる.

命題3.3

$f|_{X-Z} : X - Z \to Y$ が $\mathcal{F}$ に関して loc. acyc.

$p : X \to S$ が $\mathcal{F}$ に関して loc. acyc.

ならば Z 上の関数 φ は constructible で,

S 上平坦である.

証明は vanishing topos を使って定理3.2から導く.

(あとまわし)

命題3.3 $\Rightarrow$ 定理2.1

No.
DATE

2.4. 特性サイクルの構成

特性サイクル … Zariski local に作ってはりあわす

X: affine としてよい. $i: X \hookrightarrow \mathbb{P}$ immersion

方針!

- immersion ごとに Char 分の候補を定義
  ↑ constructibili
- これが pencil が定める射に対し, 条件をみたすことを示す.
  ↑ 平坦性 ∖ 意
- immersion によらず一般の射に対しても条件をみたすことを示す.
  ↑ 平坦性

$\mathcal{O}(1)$ $i^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{L}$ very ample $\mathcal{O}_X$-module

$$\Gamma(\mathbb{P}, \mathcal{O}(1)) \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L})$$
$$\overset{\|}{E}$$

有限次元 vect. sp

次の条件 (E) と (C) をみたす immersion を考える

条件 (E) $\forall x \neq y \in X(\bar{k})$ $E \otimes \bar{k} \twoheadrightarrow \mathcal{L}_x / m_x^2 \mathcal{L}_x \oplus \mathcal{L}_y / m_y^2 \ldots$
↑ 極大 ideal

(C) $C = \bigcup_a C_a \subset T^*X$

$\tilde{C}_a \subset X \times_{\mathbb{P}} T^*\mathbb{P}$ が 0-section には含まれない

問題　$i : X \hookrightarrow \mathbb{P} \underset{\substack{\text{Veronese} \\ d \geq 3}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}'$ とすると，(E)はみたされる．

(C)は $i : X \to \mathbb{P}$: open imm かつ Supp $\mathcal{F} = X$ の場合をのぞけばみたされる