2017年度 微分積分学 期末試験問題　理1 2,4,5,8

1月25日（木）4限 15:05-16:35 (90分)　斎藤 毅

・問題用紙　1枚，解答用紙　A4両面2枚（4ページ)，計算用紙1枚.
・筆記用具，計時機能のみの時計　以外もちこめません.
・なるべく，答案用紙の第 n ページに問題 n を解答してください.

問題 1 2変数関数 $f(x,y)$ を $f(x,y)=3x^2y+y^3-3y$ で定める.

1. $f(x,y)$ が極値をとりうる点を，$f(x,y)$ の偏導関数を使ってすべて求めよ.
2. 1. で求めた各点で，$f(x,y)$ が極小値をとるか，極大値をとるか，極値をとらないか，$f(x,y)$ の2階の偏導関数を使って判定せよ.

問題 2 次の2変数関数の積分を，指定された方法でそれぞれ求めよ.

1. 有界閉集合 $D: x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, x^2+y^2 \leqq 1$ 上の積分 $\displaystyle\int_D x^2\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$.
   (1) y で先に積分する逐次積分.
   (2) 極座標による変数変換.
2. 有界閉集合 $D: x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, x+y \leqq 1$ 上の積分 $\displaystyle\int_D x^2\sqrt{1-x-y}dxdy$.
   (1) y で先に積分する逐次積分.
   (2) $x=uv,\ y=(1-u)v$ による変数変換.

問題 3 次の広義積分を求めよ.

$$(1) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad (2) \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx, \quad (3) \int_0^1 \log x dx, \quad (4) \int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}dx.$$

問題 4 数列 (a_n) は，すべての $n \geqq 0$ に対し $a_n=\pm 1$ をみたすものとする.

1. 巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を求めよ.
2. 数列 (c_n) がコーシー列であることを表す文になるように，次の文中の (A), (B) にあてはまる数式を求めよ.
   任意の実数 $q>0$ に対し，自然数 m で，不等式 (A) をみたすすべての自然数 n に対し (B) $<q$ となるものが存在する.
3. 数列 (c_n) を $\displaystyle c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{2^k}$ で定める．N を自然数とし，$q=\dfrac{1}{2^N}$ とする．自然数 m で，小問2. の解答 (A), (B) について，不等式 (A) をみたすすべての自然数 n に対し (B) $<q$ となるという条件をみたすものを1つ求めよ．この条件がみたされることも確かめよ.

裏面の注意もよく読んで解答してください

注　意

答だけを書くのではなく，どのようにその答をもとめたかもなるべくくわしく書いて下さい。

答があっていても，解き方が問題の趣旨にあってないものや，説明が不十分なものは減点することがあります。

読みやすく，読んでわかりやすい答案を作成してください.

1. 1. $f(x,y)=3x^2y+y^3-3y$ より，$f_x(x,y)=6xy,\ f_y(x,y)=3x^2+3y^2-3$. よって，$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ をみたす点は $(x,y)=(\pm1,0),\ (0,\pm1)$ の 4 点.

2. $f_{xx}(x,y)=6y,\ f_{xy}(x,y)=6x,\ f_{yy}=6y$. $(x,y)=(\pm1,0),\ (0,\pm1)$ で，$f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=36(y^2-x^2)$ はそれぞれ，$-36<0,\ 36>0$ だから，$(x,y)=(\pm1,0)$ では峠点であり，極値をとらない. $(x,y)=(0,1)$ ではさらに $f_{xx}(x,y)=6>0$ だから極小値をとり，$(x,y)=(0,-1)$ では $f_{xx}(x,y)=-6<0$ だから極大値をとる.

2. 1. $x\geqq0,\ y\geqq0,\ x^2+y^2\leqq1$

(1) $\displaystyle\int_D x^2\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\sqrt{1-x^2-y^2}dy$

$\displaystyle=\int_0^1 x^2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot(1-x^2)dx=\frac{\pi}{4}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})=\frac{\pi}{30}.$

(2) $\displaystyle\int_D x^2\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=\int_{0\leqq r\leqq1,\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2\theta\sqrt{1-r^2}rdrd\theta$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\frac{1}{2}B(2,\frac{3}{2})\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2})^{-1}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{30}.$

2. $x\geqq0,\ y\geqq0,\ x+y\leqq1$

(1) $\displaystyle\int_D x^2\sqrt{1-x-y}dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x}} x^2\sqrt{1-x-y}dy$

$\displaystyle=\int_0^1 x^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{1-x}^3dx=\frac{2}{3}\cdot B(3,\frac{5}{2})=\frac{2}{3}\cdot2\cdot(\frac{9}{2}\frac{7}{2}\frac{5}{2})^{-1}=\frac{32}{945}.$

(2) $\displaystyle\int_D x^2\sqrt{1-x-y}dxdy=\int_{0\leqq u\leqq1,0\leqq v\leqq1} u^2v^2\sqrt{1-v}vdudv$

$\displaystyle=\int_0^1 u^2du\cdot\int_0^1 v^3\sqrt{1-v}dv=\frac{1}{3}B(4,\frac{3}{2})=\frac{1}{3}\cdot3!\cdot(\frac{9}{2}\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2})^{-1}=\frac{32}{945}.$

3. (1) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin1=\frac{\pi}{2},$ (2) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{x\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},$

(3) $\displaystyle\int_0^1\log xdx=\lim_{x\to+0}[t\log t-t]_x^1=-1,$

(4) x を e^x とおいて置換積分すれば，

$\displaystyle\int_1^\infty\frac{\log x}{x^2}dx=\int_0^\infty e^{-2x}xe^xdx=\int_0^\infty e^{-x}xdx=\Gamma(2)=1.$

4. 1. 巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ の収束半径と等しいから 1.

2. (A) $n \geqq m$. $n > m$ でもよい. (B) $|c_n - c_m|$.

3. $m = N$.

$n \geqq m$ ならば, $|c_n - c_m| = |\sum_{k=m+1}^{n} \frac{a_k}{2^k}| \leqq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^N} = q$.