2007年度 数学IB 冬学期 期末試験問題

2月15日(金) 2限(90分) 斎藤 毅

・問題用紙　1枚、解答用紙　両面1枚、計算用紙1枚

・筆記用具、計時機能のみの時計　以外もちこめません.

答だけでなく，途中の計算もくわしく書いてください．

問題1　不等式

$$0 \leq z \leq xy, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

で定まる立体の体積を V とする．次の問いに答えよ．

(1)　V を重積分として表わせ．

(2)　V の値を，逐次積分で求めよ．

(3)　V の値を，極座標に変数変換して求めよ．

問題2(1)　積分

$$\int_0^1 \frac{2}{x + \sqrt{1 + x^2}} dx$$

の値を求めよ．

(2)　極限

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + \sqrt{n^2 + k^2}}$$

を，定積分で表わし，その値を求めよ．

問題3　半径1の球の**上半分**の形をした容器を，底面が水平になるようにおき，そのてっぺんから，一定のわりあいで水を注ぎ，容器にためる．容器は，はじめは空であるとし，時刻 $t = 0$ から水を注ぐとする．

(1)　時刻 $t = 1$ で，容器がちょうどいっぱいになるとする．水面の高さが z のときの時刻 t を，z の関数として表わせ．ただし，底面の座標を $z = 0$ とする．

(2)　(1) と同じ形の容器に，同じはやさで水を注ぐ．今度は容器の底にひびわれがあり，水面の高さ z に比例する量の水がもれるとする．水をずっとためていくと，ほぼ $z = \dfrac{1}{2}$ のところで，もれる量と注ぐ量がほぼ等しくなり，水位がほぼ一定になるとする．

水面の座標 z を時刻 t の関数と考え，z のみたす微分方程式を求めよ．

(3)　(2) で求めた微分方程式を解いて，水面の高さが z のときの時刻 t を，z の関数として表わせ．

略解 **1** (1)
$$V=\int_{\substack{x\geq 0, y\geq 0,\\ x^2+y^2\leq 1}} xydxdy$$

(2)
$$V=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xydy=\int_0^1\left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^1\frac{x(1-x^2)}{2}dx=\left[\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{8}\right]_0^1=\frac{1}{8}.$$

(3)
$$V=\int_{\substack{0\leq r\leq 1,\\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}}} r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot rdrd\theta=\int_0^1 r^3dr\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta=\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1\cdot\left[\frac{-\cos 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{8}.$$

2(1)　$y=\sqrt{1+x^2}$,　$t=x+y$ とおけば，$\dfrac{1}{t}=y-x$, $x=\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$, $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)$ だから，置換積分して
$$\int_0^1\frac{2}{x+\sqrt{1+x^2}}dx=\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{1+\frac{1}{t^2}}{t}dt=\int_1^{1+\sqrt{2}}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt=\left[\log t-\frac{1}{2t^2}\right]_1^{1+\sqrt{2}}$$
$$=\log(1+\sqrt{2})-\frac{1}{2}((\sqrt{2}-1)^2-1)=\log(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}-1.$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k+\sqrt{n^2+k^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{\frac{k}{n}+\sqrt{1+(\frac{k}{n})^2}}=\int_0^1\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(\log(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}-1\right).$$

3 (1) 水面の高さが z のとき，体積は $\displaystyle\int_0^z\pi(1-z^2)dz=\pi\left(z-\frac{z^3}{3}\right)$. 時刻 t は体積に比例し，$z=1$ のとき $t=1$ だから，$t=\dfrac{3z-z^3}{2}$.

(2)　(1) より，単位時間あたり注がれる水の体積は，$\dfrac{2}{3}\pi$. もれる水の量は水面の高さ z に比例し，$z=\dfrac{1}{2}$ のときに単位時間あたり $\dfrac{2}{3}\pi$ だから，$\dfrac{4}{3}\pi z$. よって，求める方程式は
$$\pi(1-z^2)\frac{dz}{dt}=\frac{2}{3}\pi-\frac{4}{3}\pi z.$$

(3)　移項すると，$\dfrac{3}{2}\dfrac{1-z^2}{1-2z}\dfrac{dz}{dt}=1$. $t=0$ のとき $z=0$ だから，0 から t まで積分して，
$$t=\frac{3}{2}\int_0^t\frac{1-z^2}{1-2z}\frac{dz}{dt}dt=\frac{3}{2}\int_0^z\frac{1-z^2}{1-2z}dz.$$
$\dfrac{1-z^2}{1-2z}=\dfrac{1}{4}\dfrac{4-4z^2}{1-2z}=\dfrac{1}{4}\dfrac{1-(2z)^2+3}{1-2z}=\dfrac{1}{4}\left(1+2z+\dfrac{3}{1-2z}\right)$ だから，
$$t=\frac{3}{8}\int_0^z\left(1+2z+\frac{3}{1-2z}\right)dz=\frac{3}{8}\left(z+z^2-\frac{3}{2}\log(1-2z)\right).$$

問題 2　(1)　広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}dx$ が，収束するか発散するか判定せよ．

(2)　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\log n}{n^2}$ が，収束するか発散するか判定せよ．

2　(1)　$x>0$ なら $\dfrac{x^2}{2}<e^x$ だから，$x<2e^{\sqrt{x}}$ であり，$\log x < x^{\frac{1}{2}}+\log 2$ である．広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^a}dx$ は $a>1$ なら収束するから，優関数の方法より，$\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}dx$ も収束する．

(2) $\displaystyle\left(\frac{\log x}{x^2}\right)'=\frac{1-2\log x}{x^3}$ だから，$x>\sqrt{e}$ で $\dfrac{\log x}{x^2}$ は単調減少である．よって，広義積分 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}dx$ が収束するから，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\log n}{n^2}$ も収束する．

(4)　(2) で，$z=\dfrac{1}{3}$ となるときの時刻 t を求めよ．

(4)　$z=\dfrac{1}{3}$ のとき，

$$t=\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{3}{2}\log(1-\frac{2}{3})\right)=\frac{3}{8}\left(\frac{4}{9}+\frac{3}{2}\log 3\right)=\frac{1}{6}+\frac{9}{16}\log 3.$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}xdx=\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$$
$$=\ \frac{1}{8}\int_1^{1+\sqrt{2}}\left(t^2+1-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^4}\right)dt=\frac{1}{8}\left[\frac{t^3}{3}+t+\frac{1}{t}+\frac{1}{3t^3}\right]_1^{1+\sqrt{2}}$$
$$=\ \frac{1}{24}\left[\left(t+\frac{1}{t}\right)^3\right]_1^{1+\sqrt{2}}=\frac{(2\sqrt{2})^3-2^3}{24}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

(4)　V の表面積を，重積分を使って表わせ．

(4)
$$\int_{\substack{x\geq 0, y\geq 0,\\ x^2+y^2\leq 1}}\sqrt{1+y^2+x^2}dxdy+\frac{\pi}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta.$$

(5)　V の表面積を求めよ．

(5)
$$\int_{\substack{x\geq 0, y\geq 0,\\ x^2+y^2\leq 1}}\sqrt{1+y^2+x^2}dxdy=\int_{\substack{0\leq r\leq 1,\\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}}}\sqrt{1+r^2}rdrd\theta=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^1\sqrt{1+r^2}rdr$$

1 と **2**(3) より，$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+r^2}rdr=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$,　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta=\frac{1}{2}$ だから，表面積は

$$\frac{(2\sqrt{2}-1)\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{12}\right)\pi+\frac{1}{2}.$$