1　第1章の問題

A 1.1 整数全体のなす集合 $\mathbb{Z}$ は，普通の加法と乗法に関して，体の公理の（7）をみたさないことを示せ．

B 1.2 有限体 $\mathbb{F}_p$ が，体の公理の（7）をみたすことを確かめよ．

例題 1.3 $\mathbb{H}$ が，体の公理の（7）をみたすことを示せ．

A 1.4 V を K 線形空間とし，x を V の元とする．
　1．$x+x=x$ ならば $x=0$ であることを示せ．
　2．$0x=0$ を示せ．
　3．$(-1)x=-x$ を示せ．

A 1.5 $n\geq 2$ とし，$e_1,\ldots,e_n\in K^n$ を標準基底とし，$c_1,\ldots,c_n\in K$ とする．$1\leq i<n$ に対し $x_i=e_i-e_{i+1}$ とおき，$x_n=c_1e_1+\cdots+c_ne_n$ とおく．次の条件は同値であることを示せ．
　（1）$x_1,\ldots,x_n$ は K^n の基底である．
　（2）$c_1+\cdots+c_n\neq 0$ である．

A 1.6 $C^\infty(\mathbb{R})$ が，線形空間の公理（5）をみたすことを確めよ．

A 1.7 $1,\sqrt{-1}\in\mathbb{C}$ は，$\mathbb{C}$ の $\mathbb{R}$ 線形空間としての基底であることを示せ．

A 1.8 X を有限集合とする．$x\in X$ に対し，写像 $e_x\colon X\to K$ を $e_x(x)=1, e_x(y)=0\ (y\neq x, y\in X)$ で定める．$X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ なら，$e_{x_1},\ldots,e_{x_n}$ は K^X の基底であることを示せ．

A 1.9 K^3 の部分空間 W,W' を，

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\middle|\ a+b+c=0\right\},\quad W'=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\middle|\ a=b=c\right\}$$

で定める．e_1,e_2,e_3 を K^3 の標準基底とする．
　1．e_1-e_3,e_2-e_3 は W の基底であることを示せ．
　2．$W\cap W'$ と $W+W'$ を求めよ（K の標数が3のときは，他のときと違うことに注意）．

A 1.10 n を自然数とする．
　1．$M_n(K)$ の部分空間，対称行列の空間 $S_n(K)$，交代行列の空間 $A_n(K)$，対角行列の空間 $D_n(K)$，上三角行列の空間 $T_n(K)$ の基底をそれぞれ1つ与えよ．
　2．$S_n(K)$ と $T_n(K)$ の共通部分 $S_n(K)\cap T_n(K)$ は $D_n(K)$ であり，和 $S_n(K)+T_n(K)$ は $M_n(K)$ であることを示せ．
　3．$M_n(K)=A_n(K)\oplus T_n(K)$ を示せ．K の標数が2でなければ，$M_n(K)=S_n(K)\oplus A_n(K)$ であることを示せ．

A 1.11 線形空間 V と，その部分空間 W_1,W_2,W_3 で，$W_1\cap W_2=W_2\cap W_3=W_3\cap W_1=0$ だが，$W_1+W_2+W_3$ が $W_1\oplus W_2\oplus W_3$ とはならない例を1つあげよ．

A 1.12 V を K 線形空間とし，W, W' を V の部分空間とする．$W \cup W'$ が V の部分空間ならば，$W \subset W'$ かまたは $W' \subset W$ であることを示せ.

B 1.13 V を K 線形空間とし，V', W, W' を V の部分空間とする．$W \supset W'$ ならば $(V' \cap W) + W' = (V' + W') \cap W$ となることを示せ.

B 1.14 $W_1, \ldots, W_n \subset V$ を部分空間とする．次の条件は同値であることを示せ.
（1）$W_1 + \cdots + W_n = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ である.
（2）すべての $i = 1, \ldots, n$ に対し，$(W_1 + \cdots + W_{i-1}) \cap W_i = 0$ である.

A 1.15 定理 1.5.4 の証明の中で，体の公理（７）をつかったところをみつけよ.

例題 1.16 $m \leq n$ とする．$\{(x_1, \ldots, x_m) | x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{F}_p^n$は 1 次独立 $\}$ の元の個数は $(p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{m-1})$ である.
$\{\mathbb{F}_p^n$の基底 $\}$ の元の個数は $(p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1})$ である.

A 1.17 $n \geq 3$ とし，$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする.
１．$e_i + e_j, 1 \leq i < j \leq n$ は $\mathbb{R}^n$ の生成系であることを示せ.
２．$e_1 + e_2, \ldots, e_1 + e_n$ は 1 次独立なことを示せ.
３．$e_1 + e_2, \ldots, e_1 + e_n, e_i + e_j$ が $\mathbb{R}^n$ の基底であるための，$1 \leq i < j \leq n$ についての条件を求めよ.

A 1.18 V を有限次元線形空間とする．V の部分空間 W と W' に対し，次の条件は同値であることを示せ.
（１）$V = W \oplus W'$.
（２）$\dim V = \dim W + \dim W'$ かつ $W \cap W' = 0$.

B 1.19 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の部分空間 V, W, W', W'' を，

$$\begin{aligned}
V &= \{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | n \geq 0 \text{ に対し } a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n\}, \\
W &= \{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | n \geq 0 \text{ に対し } a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n\}, \\
W' &= \{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | n \geq 0 \text{ に対し } a_{n+2} = a_n\} \\
W'' &= \{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | n \geq 0 \text{ に対し } a_{n+1} = -a_n\}
\end{aligned}$$

で定める．次のことを示せ.
１．$\dim V = 3$.
２．$W \cap W'$ は，定数列全体のなす空間 $\{(a) | a \in \mathbb{R}\}$ である.
３．$W + W' = V$.
４．$V = W \oplus W''$.
５．数列 $(1), (n), ((-1)^n)$ は，V の基底である.

B 1.20 $n \geq 0$ を自然数とし，$W_n \subset K[X]$ を n 次以下の多項式全体のなす部分空間とする．$1, X, X(X-1), \ldots, X(X-1) \cdots (X-(n-1))$ は W_n の基底であることを示せ.

B 1.21 K を体とする．$K[X]$ の部分空間 $\{P \in K[X] | P$ の奇数次の項はすべて 0 であり，$P(1) = 0\}$ の基底を 1 つ見つけよ.

2　第2章の問題

A 2.1 V を線形空間とし，$x_1, \ldots, x_n \in V$ とする．$f\colon K^n \to V$ を，$x_1, \ldots, x_n$ が定める線形写像とする．次の条件はそれぞれ同値であることを示せ．

1．（1）$x_1, \ldots, x_n$ は1次独立である．
（2）f は単射である．

2．（1）$x_1, \ldots, x_n$ は V の生成系である．
（2）f は全射である．

A 2.2 $V \subset K[X]$ を n 次以下の多項式全体のなす部分空間とし，$a_0, \ldots, a_n$ を相異なる K の元とする．線形写像 $F\colon V \to K^{n+1}$ を $F(f) = \begin{pmatrix} f(a_0) \\ \vdots \\ f(a_n) \end{pmatrix}$ で定める．

1．F は単射であり，したがって同形であることを示せ．
2．F の逆写像による K^{n+1} の標準基底の元 e_{i+1} の像を求めよ．

B 2.3 V を K 線形空間とし，W を V の有限次元部分空間，$f\colon V \to V$ を V の自己同形とする．$f(W) \subset W$ ならば次がなりたつことを示せ．

1．$f|_W\colon W \to W$ は W の自己同形である．
2．f の逆写像 $g\colon V \to V$ も，$g(W) \subset W$ をみたす．

A 2.4 $a_1, \ldots, a_n$ を K^n の基底とし，$b_1, \ldots, b_n \in K^n$ とする．$A, B \in M_n(K)$ をそれぞれ $a_1, \ldots, a_n$，$b_1, \ldots, b_n$ をならべて得られる行列とする．$a_1, \ldots, a_n$ を $b_1, \ldots, b_n$ にうつす線形写像 $f : K^n \to K^n$ は，BA^{-1} 倍写像であることを示せ．

A 2.5 $f, g\colon V \to W$ を線形写像とする．$\Delta\colon V \to V \oplus V$ を対角写像 $\Delta = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_V \\ \mathrm{id}_V \end{pmatrix}$，$f \oplus g\colon V \oplus V \to W \oplus W$ を f と g の直和 $\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$，$+\colon W \oplus W \to W$ を和 $+ = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_W & \mathrm{id}_W \end{pmatrix}$ とする．このとき，写像の和 $f + g : V \to W$ は，合成 $+ \circ (f \oplus g) \circ \Delta$ と等しいことを示せ．

C 2.6 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \text{ のとき} \\ 0 & x \leq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義する．

1．$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ を示せ．
2．写像 $T : C^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ を $T(g) = (g^{(n)}(0))$ で定める．$T(f) = 0$ を示せ．

A 2.7 $M_2(\mathbb{R})$ の部分空間 V を，$V = \left\{ X \in M_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, X \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ で定める．

1. $E_{ij} \in M_2(\mathbb{R})$ を行列単位とする．E_{11}, E_{12}, E_{22} は V の基底であることを示せ．

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおき，V の自己準同形 $f : V \to V$ を $f(X) = AXB$ で定める．$f : V \to V$ の，基底 E_{11}, E_{12}, E_{22} に関する行列表示を求めよ．

A 2.8 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$ とし，A 倍写像を $f_A : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ で表わす．$\mathbb{C}^4$ の基底 $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{-1} \\ -1 \\ \sqrt{-1} \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-1} \\ -1 \\ -\sqrt{-1} \end{pmatrix}$ を考える．

1．$f_A : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ の，基底 x_1, x_2, x_3, x_4 に関する行列表示を求めよ．

2．$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \,\middle|\, a+b+c+d = 0 \right\}$ とし，W の基底 $y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を考える．$f(W) \subset W$ を示し，f の W への制限 $f|_W : W \to W$ の，基底 y_1, y_2, y_3 に関する行列表示 $B \in M_3(\mathbb{C})$ を求めよ．

3．W の基底 y_1, y_2, y_3 から x_2, x_3, x_4 への，底の変換行列 $P \in GL_3(\mathbb{C})$ を求めよ．

4．$f|_W : W \to W$ の，基底 x_2, x_3, x_4 に関する行列表示 C が $P^{-1}BP$ であることを確かめよ．

A 2.9 $A \in M_{mn}(K)$ とする．線形写像 $f\colon M_{1m}(K) \to M_{1n}(K)$ を $f(x) = xA$ で定める．f の，基底 $E_{11}, \dots, E_{1m} \in M_{1m}(K)$ と基底 $E_{11}, \dots, E_{1n} \in M_{1n}(K)$ に関する行列表示は，A の転置行列 ${}^tA \in M_{nm}(K)$ であることを示せ．

A 2.10 $\alpha = a + b\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ とする．α 倍写像 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ の，$\mathbb{R}$ 線形空間としての基底 $1, \sqrt{-1}$ に関する行列表示 $A \in M_2(\mathbb{R})$ を求めよ．

B 2.11 W を漸化式 $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$ をみたす実数列の空間とし，線形写像 $D\colon W \to W$ を $D(a)(n) = a(n+1)$ で定める．

1．W の基底 $(1), (n), ((-1)^n)$ に関する行列表示 A を求めよ．

2．$b_0, b_1, b_2 \in W$ を，同形 $W \to \mathbb{R}^3\colon (a_n) \mapsto \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ による標準基底 e_1, e_2, e_3 の逆像とする．b_0, b_1, b_2 に関する D の行列表示 B を求めよ．

3．W の基底 b_0, b_1, b_2 から基底 $(1), (n), ((-1)^n)$ への底の変換行列 P を求めよ．

4．$A = P^{-1}BP$ を確めよ．

B 2.12 W を n 次以下の多項式全体のなす空間とする．W の自己準同形 $D\colon W \to W$ を $D(f) = f(X+1)$ で定める．

1．W の基底 $1, X, \dots, X^n$ に関する D の行列表示を求めよ．

2．W の基底 $1, X, X(X-1), \dots, X(X-1)\cdots(X-(n-1))$ に関する D の行列表示を求めよ．

B 2.13 $V = \langle \cos, \sin \rangle \subset C^\infty(\mathbb{R})$ とする．

1．a を実数とし，自己準同形 $L_a\colon V \to V$ を $L_a(f)(x) = f(x+a)$ で定める．V の基底 $\cos, \sin$ に関する，L_a の行列表示を求めよ．

2．自己準同形 $D\colon V \to V$ を $D(f) = f'$ で定める．V の基底 $\cos, \sin$ に関する，D の行列表示を求めよ．

A 2.14 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ とする．掃き出し法を使って，A 倍写像の核と像を求めよ．A の階数も求めよ．

A 2.15 n を自然数とする．$A \in M_n(K)$ を $A - {}^tA \in M_n(K)$ にうつす線形写像 $M_n(K) \to M_n(K)$ の核と像を求めよ．

A 2.16 $A \in M_{mn}(K)$ とする．命題 2.4.8 を使って $\mathrm{rank}\ A = \mathrm{rank}\ {}^tA$ を示せ．

B 2.17 $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおいて，線形写像 $F\colon \mathbb{R}[X] \to M_2(\mathbb{R})$ を $F(f) = f(J)$ で定める．$\mathrm{Ker}\ F = (X^2+1), \mathrm{Im}\ F = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}J$ であることを示せ．

B 2.18 $f \in K[X]$ を 0 でない多項式とする．f 倍写像 $K[X] \to K[X]$ の核は 0 であり，像は $(f) = \{fg | g \in K[X]\}$ であることを示せ．

B 2.19 $F\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ を $F(f) = f'$ で定め，$G\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ を $G(f)(x) = \int_0^x f(x)dx$ で定める．F と G の像および核を求めよ．

B 2.20 $f\colon V \to W$ を線形写像とする．V の部分空間全体の集合を $\mathcal{S}_V$ で，W の部分空間全体の集合を $\mathcal{S}_W$ で表わす．写像 $f_*\colon \mathcal{S}_V \to \mathcal{S}_W$ と $f^*\colon \mathcal{S}_W \to \mathcal{S}_V$ を，それぞれ $f_*(V') = f(V')$, $f^*(W') = f^{-1}(W')$ で定める．次のことを示せ．

1．写像 $f_*\colon \mathcal{S}_V \to \mathcal{S}_W$ の像は，$\{W' \in \mathcal{S}_W | W' \subset \mathrm{Im}\ f\}$ であり，$f^*\colon \mathcal{S}_W \to \mathcal{S}_V$ の像は，$\{V' \in \mathcal{S}_V | V' \supset \mathrm{Ker}\ f\}$ である．

2．f^*, f_* は 1 対 1 対応 $\{V' \in \mathcal{S}_V | V' \supset \mathrm{Ker}\ f\} \to \{W' \in \mathcal{S}_W | W' \subset \mathrm{Im}\ f\}$ を与える．

3．$f_* \circ f^* \circ f_* = f_*$ かつ $f^* \circ f_* \circ f^* = f^*$ である．

C 2.21 $U = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}\ z > 0\}$ とし，$V = \{U$ 上の正則関数$\}$ とおく．自己準同形 $D\colon V \to V$ を $D(f)(z) = f'(z) + zf''(z)$ で定める．

1．$W = \mathrm{Ker}\ D$ の基底を 1 つ与えよ．

2．$T\colon W \to W$ を，$T(f)$ を f を単位円上を正の向きに一回り解析接続することで得られる関数とおくことで定める．1 で求めた基底に関する T の行列表示を求めよ．

C 2.22 線形写像 $\dfrac{d}{dX}\colon \mathbb{C}(X) \to \mathbb{C}(X)$ の像および核を求めよ．

C 2.23 K を体とし，線形写像 $F\colon K[X] \to \{K$ から K への写像$\}$ を $f \mapsto (x \mapsto f(x))$ で定める．K が無限体ならば，F は単射であることを示せ．

A 2.24 $n \geq 2$ を自然数とする．線形写像 $f\colon K \to K^n, g\colon K^n \to K^n, h\colon K^n \to K$ をそれぞれ，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ で定める．$0 \to K \xrightarrow{f} K^n \xrightarrow{g} K^n \xrightarrow{h} K \to 0$ は完全系列であることを示せ．

A 2.25 V を線形空間とし，W, W' を部分空間とする．線形写像 $+\colon W \oplus W' \to W + W'$ を $(x, x') \mapsto x + x'$ で定め，線形写像 $-\colon W \cap W' \to W \oplus W'$ を $x \mapsto (x, -x)$ で定める．このとき，$0 \to W \cap W' \xrightarrow{-} W \oplus W' \xrightarrow{+} W + W' \to 0$ は完全系列であることを示せ．

A 2.26 直和分解 $\mathbb{R}^3 = \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle \oplus \langle e_2 - e_1, e_3 - e_2 \rangle$ を与える射影子 $e \in M_3(\mathbb{R})$ を求めよ．

B 2.27 $e\colon V \to V$ を射影子とし，$V = W \oplus W'$ を e が定める直和分解とする．線形写像 $f\colon V \to V$ に対し，次の条件は同値であることを示せ．

（1）$fe = ef$.

（2）$f(W) \subset W$ かつ $f(W') \subset W'$.

B 2.28 $e_1, \ldots, e_n$ が V の射影子で，$1 = e_1 + \cdots + e_n$ かつ，$i \neq j$ なら $e_i e_j = e_j e_i = 0$ とする．このとき，$V_i = \mathrm{Im}\ e_i$ とおくと，$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ であることを示せ．

C 2.29 $V = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) | f(x+1) = f(x)\}$ とする．$i\colon \mathbb{R} \to V$ を $i(a) =$ 定数関数 a，$d\colon V \to V$ を $d(f) = f'$，$p\colon V \to \mathbb{R}$ を $p(f) = \int_0^1 f(x)dx$ で定義する．$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{i} V \xrightarrow{d} V \xrightarrow{p} \mathbb{R} \to 0$ は完全系列であることを示せ．

C 2.30 $\mathbb{C}$ の開集合 U に対し，$\mathcal{O}(U)$ で U 上の正則関数の集合を表し，$\mathbb{C}$ の開集合 $U \supset V$ に対し，$f_{VU}\colon \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ で制限写像を表す．

1．U, V を $\mathbb{C}$ の開集合とすると，

$$0 \to \mathcal{O}(U \cup V) \xrightarrow{f_{U(U\cup V)} \oplus f_{V(U\cup V)}} \mathcal{O}(U) \oplus \mathcal{O}(V) \xrightarrow{f_{(U\cap V)U} - f_{(U\cap V)V}} \mathcal{O}(U \cap V)$$

は完全系列であることを示せ．

2．$U = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ とすると，

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}(U) \xrightarrow{\frac{d}{dz}} \mathcal{O}(U) \longrightarrow 0$$

は完全系列であることを示せ．

3．$U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とし，C を原点を中心とする半径 1 の円に正の向きを与えたものとする．$\mathrm{res}\colon \mathcal{O}(U) \to \mathbb{C}$ を $\mathrm{res}(f) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \displaystyle\int_C f(z)dz$ で定義すると，

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O}(U) \xrightarrow{\frac{d}{dz}} \mathcal{O}(U) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

は完全系列であることを示せ．

3　第3章の問題

例題 3.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の最小多項式を求めよ.

A 3.2 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ とする.

1．e_2 によって生成される $\mathbb{R}^4$ の安定部分空間を求めよ．e_3 によって生成される $\mathbb{R}^4$ の安定部分空間も求めよ.

2．A の最小多項式を求めよ.

A 3.3 $\alpha \in \mathbb{C}$ とする．α 倍写像 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ の $\mathbb{R}$ 線形写像としての最小多項式を求めよ（α が実数かそうでないかで違うことに注意）.

B 3.4 n を自然数とし，$a \in K$ とする．n 次元 K 線形空間 V の自己準同形 f について，次は同値であることを示せ.

（1）f の最小多項式は $(X - a)^n$ である.

（2）V の基底で，それに関する f の行列表示がジョルダン行列 $J(a, n)$ となるものがある.

例題 3.5 $A \in M_n(K)$ を上三角行列とし，$a_1, \ldots, a_n$ を A の対角成分とする．次のことを示せ.

1．A の最小多項式 φ は $F = (X - a_1) \cdots (X - a_n)$ をわりきる.

2．対角成分 $a_1, \ldots, a_n$ は，すべて A の固有値である.

例題 3.6 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$ とする.

1．次の条件は同値であることを示せ.

（1）A は対角化可能である.

（2）A はスカラー行列であるかまたは，$X^2 - (a + d)X + ad - bc = (X - \alpha)(X - \beta)$ をみたす K の相異なる元 α, β がある.

2．次の条件は同値であることを示せ.

（1）A は三角化可能である.

（2）$X^2 - (a + d)X + ad - bc = (X - \alpha)(X - \beta)$ をみたす K の元 α, β がある.

A 3.7 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$ とする.

1．A の最小多項式を求めよ.

2．A の固有値をすべて求めよ.

3．A の固有ベクトルからなる $\mathbb{C}^4$ の基底を求めよ.

A 3.8 $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ は対角化可能だが，$B \in M_2(\mathbb{R})$ は対角化可能でないことを示せ.

A 3.9 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ について，次の条件はそれぞれ同値であることを示せ.

1.（1）A は対角化可能である.
（2）A はスカラー行列であるかまたは $(a-d)^2 + 4bc > 0$.
2.（1）A は三角化可能である.
（2）$(a-d)^2 + 4bc \geq 0$.

B 3.10 n を自然数とし，$a \in K$ とする．多項式 $(X-a)^n$ の同伴行列は $J(a,n)$ と共役であることを示せ.

B 3.11 V を有限次元線形空間とし，f をその自己準同形とする．次の条件は同値であることを示せ.

（1）f はスカラー倍である.
（2）0 でない任意のベクトル $x \in V$ は，f の固有ベクトルである.

A 3.12 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ とする.

1．A は三角化可能だが，対角化可能でないことを示せ.
2．$V = \mathbb{R}^3$ の A に関する一般固有空間分解を求めよ.

B 3.13 $V = \{f \in \mathbb{R}[X] |\deg f \leq n\}$ とし，V の自己準同形 F, E をそれぞれ $F(f)(X) = f(X+1)$，$E(f)(X) = Xf'(X)$ で定める.

1．E, F がそれぞれ対角化可能，三角化可能であるか調べよ.
2．E, F の最小多項式を求めよ.

B 3.14 V を K 線形空間とし，f を V の自己準同形とする．$a \in K$ を f の固有値とし，$W = \widetilde{V}_a$ を一般固有空間，$g = f|_W : W \to W$ を f の制限とする．f の最小多項式の根 a の重複度を d とすると，g の最小多項式は $(X-a)^d$ であることを示せ.

B 3.15 V を有限次元 K 線形空間とし，f を V の三角化可能な自己準同形とする．W を V の部分空間で，$f(W) \subset W$ をみたすものとする．$V = \widetilde{V}_{a_1} \oplus \cdots \oplus \widetilde{V}_{a_r}$ が，V の f に関する一般固有空間分解であるとき，W の $f|_W$ に関する一般固有空間分解を求めよ.

B 3.16 V を線形空間とし，f をその自己準同形とする．$a_1, \ldots, a_r$ を相異なる K の元，$d_1, \ldots, d_r \geq 1$ を自然数とする．f の最小多項式 φ が 1 次式の積 $(X-a_1)^{d_1} \cdots (X-a_r)^{d_r}$ に分解するとし，$V = \widetilde{V}_{a_1} \oplus \cdots \oplus \widetilde{V}_{a_r}$ を一般固有空間分解とする．$i = 1, \ldots, r$ に対し，多項式 $G_i, E_i \in K[X]$ を

$$G_i = (X-a_1)^{d_1} \cdots (X-a_{i-1})^{d_{i-1}} (X-a_{i+1})^{d_{i+1}} \cdots (X-a_r)^{d_r},$$

$$E_i = 1 - \frac{(-1)^{d_i}}{G_i(a_i)^{d_i}}(G_i - G_i(a_i))^{d_i} = 1 - \left(1 - \frac{G_i}{G_i(a_i)}\right)^{d_i}$$

で定める.

1．

$$E_i(f)|_{\widetilde{V}_{a_j}} = \begin{cases} \mathrm{id}_{\widetilde{V}_{a_j}} & i = j \text{ のとき} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

を示せ.

2．$\widetilde{V}_{a_i} = \mathrm{Im}\ G_i(f)$ を示せ.

例題 3.17 1．V の基底 $x_1, \ldots, x_n$ と，$\mathrm{Im}\ N^r$ の部分空間 $W_r = \displaystyle\sum_{0\leq p, r\leq q, r<p+q\leq m} V_{p,q}$ の基底 $N^r y_1, \ldots, N^r y_s$ が与えられているとする．部分空間 $V_{r,0}$ とその基底の構成法を与えよ.

2．上の構成法を使って，$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のジョルダン標準形を次のようにして求めよ.

（1）$N^2 \neq 0, N^3 = 0$ を示せ.

（2）定理 3.4.2 の条件（J）をみたす直和分解 $K^6 = \bigoplus_{p+q\leq 2} V_{p,q}$ を１つ与えよ.

（3）$J = P^{-1}NP$ が N のジョルダン標準形となるような，$P \in GL_6(K)$ を１つ求めよ. J も求めよ.

A 3.18 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ とする.

1．A の固有値をすべて求めよ.

2．A の各固有値について，固有空間と一般固有空間の基底をそれぞれ１つ求めよ.

3．A のジョルダン標準形 J を１つ求めよ.

4．$P^{-1}AP = J$ をみたす $P \in GL_4(\mathbb{R})$ を１つ求めよ.

5．A の半単純部分を求めよ.

A 3.19 V を有限次元 K 線形空間とし，N を $N^{m+1} = 0$ をみたす V の自己準同形とする. $V = \bigoplus_{0\leq p\leq m, 0\leq q\leq m-p} V_{p,q}$ を定理 3.4.2 の条件をみたす直和分解とする．$\mathrm{Im}\ N^r$ を，$V_{p,q}$ の直和として表わせ.

B 3.20 $V = \{f \in K[X] | \deg f \leq n\}$ とし，$F\colon V \to V$ を $F(f)(X) = f(X+1)$ で定める．F のジョルダン標準形を与える V の基底を１つ求めよ.

B 3.21 $a_1,\dots,a_r$ を K の相異なる元とし，$d_1,\dots,d_r\geq 1$ を自然数とする．$n=d_1+\cdots+d_r$ とおき，$A\in M_n(K)$ を多項式 $(X-a_1)^{d_1}\cdots(X-a_r)^{d_r}$ の同伴行列とする．

1．$V=K^n$ の A に関する一般固有空間 $\widetilde{V}_{a_i}$ を求めよ（ヒント：問題 3.16.2 を使う）．

2．A のジョルダン標準形は $J(a_1,d_1)\oplus\cdots\oplus J(a_r,d_r)$ であることを示せ．

C 3.22 V を有限次元線形空間とし，f をその三角化可能な自己準同形とする．f の半単純部分 s と巾零部分 n は，どちらも f の多項式であることを示せ．f が同形なら，巾単部分 u も f の多項式であることを示せ（ヒント：問題 3.16 を使う）．

C 3.23 V を有限次元 K 線形空間とし，f を V の自己準同形とする．s,n がたがいに可換な V の自己準同形で，s は対角化可能，n が巾零かつ $f=s+n$ とする．このとき，f は三角化可能で，s は f の半単純部分，n は f の巾零部分であることを示せ．

B 3.24 $a_1,\dots,a_n\in K$ とし，$A=\begin{pmatrix}1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ & & \cdots & \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1}\end{pmatrix}\in M_n(K)$ とおく．

1．$V=\{f\in K[X] \mid \deg f\leq n-1\}$ とし，$F\colon V\to K^n$ を，$g\mapsto\begin{pmatrix}g(a_1)\\ \vdots\\ g(a_n)\end{pmatrix}$ で定める．A は，線形写像 F の，基底 $B=(1,X,\dots,X^{n-1})$ と標準基底に関する行列表示であることを示せ．

2．$i=1,\dots,n$ に対し，$f_i=(X-a_1)\cdots(X-a_{i-1})$ とおく．V の基底 B から $B'=(f_1,f_2,\dots,f_n)$ への底の変換行列 P の行列式は，1 であることを示せ．

3．線形写像 F の，基底 B' と標準基底に関する行列表示 A' の行列式を求めよ．

4．$A'=AP$ を示し，$\det A$ を求めよ．

例題 3.25 $A\in M_2(K)$ とし，Φ_A を固有多項式，φ_A を最小多項式とする．次のことを示せ．

1．$\Phi_A=(X-a)^2$ ならば，次のどちらかがなりたつ．

（1）$\varphi_A=X-a$ であり，$A=a$ である．

（2）$\varphi_A=(X-a)^2$ であり，A は $J(a,2)=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}$ と共役である．

2．Φ_A が相異なる 1 次式の積 $(X-a)(X-b)$ ならば，φ_A も $(X-a)(X-b)$ で，A は $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$ と共役である．

3．Φ_A が 1 次式の積に分解しないならば，$\varphi_A=\Phi_A$ で，A は Φ_A の同伴行列 $\begin{pmatrix}0 & -\det A\\ 1 & \mathrm{Tr}\ A\end{pmatrix}$ と共役である．

A 3.26 行列 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ の，トレース，行列式，固有多項式を求めよ．

A 3.27 W を問題 2.11 の線形空間 $\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n\}$ とし，$D \colon W \to W$ を $D((a_n)) = (a_{n+1})$ で定まる自己準同形とする．D のトレース，行列式，固有多項式を求めよ．

A 3.28 $\alpha \in \mathbb{C}$ とする．α 倍写像 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ の $\mathbb{R}$ 線形写像としての固有多項式を求めよ．

A 3.29 $A \in M_2(K)$ が巾零であるための条件は，$\mathrm{Tr}\ A = \det A = 0$ であることを示せ．

B 3.30 $W = \{f \in K[X] | \deg f \leq n\}$ とする．W の自己準同形 $F \colon W \to W$ を $F(f) = f(X+1)$ で定める．F の固有多項式を求めよ．

B 3.31 有限次元線形空間の三角化可能な自己準同形に対し，例題 3.5.1 を使って，定理 3.6.8 の別証明を与えよ．

B 3.32 V を有限次元 K 線形空間とし，f を V の自己準同形とする．$a \in K$ を f の固有値とし，$W = \widetilde{V}_a$ を一般固有空間，$g = f|_W : W \to W$ を f の制限とする．W の基底 $x_1, \ldots, x_m$ に関する，g の行列表示 A が上三角行列ならば，A の対角成分はすべて a であることを示せ．

C 3.33 $A \in M_2(K)$ とし，$K[A] = \{f(A) | f \in K[X]\}, Z(A) = \{B \in M_2(K) | AB = BA\}$ とおく．次の条件はそれぞれ同値であることを示せ．

1．（1）A はスカラー行列である．

（2）0 でない任意のベクトル $x \in K^2$ は，A の固有ベクトルである．

（3）$K[A] = K$ である．

（4）$Z(A) = M_2(K)$ である．

2．（1）A はスカラー行列でない．

（2）x, Ax が K^2 の基底となるベクトル x がある．

（3）$K[A] = K \oplus KA$ かつ $A \neq 0$ である．

（4）$Z(A) = K \oplus KA$ かつ $A \neq 0$ である．

C 3.34 V を有限次元 $\mathbb{C}$ 線形空間とし，f をその自己準同形とする．

1．$\det(1 - fX) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Tr} f^n}{n} X^n\right)$ を示せ．

（f が三角化可能であることを仮定して示してもよい．）

2．次の条件は同値であることを示せ．

（1）f は巾零である．

（2）すべての自然数 $n \geq 1$ に対し，$\mathrm{Tr} f^n = 0$ である．

A 3.35 $P = X^3 - X^2 - X + 1$ とする．

1．$V = \mathrm{Ker}(P(D) : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}))$ の基底で，$D : V \to V$ の行列表示 J がジョルダン標準形になるものを１つ与えよ．

2．$W = \mathrm{Ker}(P(D) : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ の基底で，$D \colon W \to W$ の行列表示 J がジョルダン標準形になるものを１つ与えよ．

B 3.36 $m \geq 0$ を自然数とし，b と $c \neq 0$ を実数とする．$V_{b,c}(m) = \mathrm{Ker}(((D-b)^2+c^2)^m : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}))$ とおく．

1．

$$e^{bx}\cos cx, e^{bx}\sin cx, xe^{bx}\cos cx, xe^{bx}\sin cx, \ldots, x^{m-1}e^{bx}\cos cx, x^{m-1}e^{bx}\sin cx$$

は，$V_{b,c}(m)$ の基底であることを示せ．

2．上の基底に関する，$D|_{V_{b,c}(m)}$ の行列表示を求めよ．

4　第4章の問題

A 4.1 $V = K^3$ とし，$W = \langle e_1 - e_3, e_2 - e_3 \rangle$ とする．標準基底 $e_1, e_2, e_3 \in K^3$ の双対基底を f_1, f_2, f_3 とする．

1．$f_1 + f_2 + f_3$ の W への制限は 0 であることを示せ．

2．$f_1|_W, f_2|_W$ は W^* の基底であることを示せ．

A 4.2 $a_1, \ldots, a_n \in K^n$ を基底とし，$b_1, \ldots, b_n \in K^n$ とする．次の条件は同値であることを示せ．

（1）転置 ${}^tb_1, \ldots, {}^tb_n$ 倍写像が定める線形形式 $f_{b_1}, \ldots, f_{b_n} \in (K^n)^*$ は，$a_1, \ldots, a_n$ の双対基底である．

（2）$A = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \in M_n(K)$ とおくと，${}^tBA = 1$ である．

B 4.3 V を問題 2.11 の線形空間 $\{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | a(n+3) = a(n+2) + a(n+1) - a(n)\}$ とする．自然数 $m \geq 0$ に対し，$e_m \colon V \to \mathbb{R}$ を，$e_m(a) = a(m)$ で定まる線形形式とする．

1．e_0, e_1, e_2 は V^* の基底であることを示せ．

2．e_3 を e_0, e_1, e_2 の 1 次結合として表わせ．

B 4.4 $V = \{f \in K[X] | \deg f \leq n\}$ とおく．

1．$a \in K$ に対し線形形式 $g_a \colon V \to K$ を $g_a(f) = f(a)$ で定める．$a_0, \ldots, a_n \in K$ が相異なるならば，$g_{a_0}, \ldots, g_{a_n}$ は双対空間 V^* の基底であることを示せ．

2．$K = \mathbb{R}$ とする．自然数 $i \geq 0$ に対し，線形形式 $h_i \colon V \to \mathbb{R}$ を $h_i(f) = f^{(i)}(0)$ で定める．$h_0, \ldots, h_n$ は双対空間 V^* の基底であることを示せ．

$h_0, \ldots, h_n$ が定める同形 $V \to \mathbb{R}^{n+1}$ の逆写像を求めよ．

A 4.5 $V = K^3$ とし，$W = \langle e_1 - e_3, e_2 - e_3 \rangle$ とする．標準基底 $e_1, e_2, e_3 \in K^3$ の双対基底を f_1, f_2, f_3 とする．$W^\perp$ の基底を，双対基底 f_1, f_2, f_3 の 1 次結合として表わせ．

A 4.6 $V = K^n$ とする．$A \in M_{mn}(K)$ とし，$W = \{x \in K^n | Ax = 0\}$ とおく．$a \in K^n$ に対し，$f_a \colon K^n \to K$ を，$f_a(x) = {}^tax$ で定まる線形形式とし，転置行列 ${}^tA$ が $a_1, \ldots, a_m \in K^n$ をならべて得られる行列であるとする．

1．$W = \langle f_{a_1}, \ldots, f_{a_m} \rangle^\top$ を示せ．

2．$W^\perp = \langle f_{a_1}, \ldots, f_{a_m} \rangle$ を示せ．

B 4.7 V を問題 4.3 の線形空間 $\{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | a(n+3) = a(n+2) + a(n+1) - a(n)\}$ とする．自然数 $m \geq 0$ に対し，$e_m \colon V \to \mathbb{R}$ を，$e_m(a) = a(m)$ で定まる線形形式とする．

$W = \langle (1), (n) \rangle$ とする．W の零化空間 $W^\perp$ の基底を 1 つとり，それを e_0, e_1, e_2 の 1 次結合として表わせ．

A 4.8 $V = K^3$ とし，e_1, e_2, e_3 を標準基底，$f_1, f_2, f_3 \in V^*$ をその双対基底とする．$W = K(e_1 + e_2 + e_3)$ とし，$W^\perp \subset V^*$ をその零化空間とする．

1．$W^\perp$ の基底を 1 つ求め，それを f_1, f_2, f_3 の 1 次結合として表わせ．

2．$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とし，$f \colon V \to V$ を A 倍写像とし，$f^* \colon V^* \to V^*$ をその双対写像とする．$f(W) \subset W, f^*(W^\perp) \subset W^\perp$ を示せ．

3．1で作った $W^\perp$ の基底に関する，$f^*|_{W^\perp}$ の行列表示を求めよ．

A 4.9 $f \colon V \to W$ を線形写像とする．図式

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ {\scriptstyle e_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle e_W} \\ V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**} \end{array}$$

は可換であることを示せ．

B 4.10 V を問題 4.3 の線形空間 $\{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | a(n+3) = a(n+2) + a(n+1) - a(n)\}$ とし，$D \colon V \to V$ を $D(x)(n) = x(n+1)$ で定まる自己準同形とする．自然数 $m \geq 0$ に対し，$e_m \colon V \to \mathbb{R}$ を，$e_m(a) = a(m)$ で定まる線形形式とする．

1．$D^*(e_n) = e_{n+1}$ を示せ．

2．D^* の，基底 e_0, e_1, e_2 に関する行列表示を求めよ．

B 4.11 V を有限次元線形空間とし，f をその自己準同形とする．

1．f の固有多項式と，双対 f^* の固有多項式は等しいことを示せ．

2．f の最小多項式と，双対 f^* の最小多項式も等しいことを示せ．

3．V の一般固有空間分解を使って，V^* の一般固有空間分解を表せ．

4．f が巾零であるとする．V の定理 3.4.2 の条件を満たす直和分解を使って，V^* の定理 3.4.2 の条件を満たす直和分解を表せ．

A 4.12 線形写像 $f, g \colon V \to W$ に対し，次の条件は同値であることを示せ．

（1）$f = g$．

（2）任意の線形空間 W' に対し，f と g がひきおこす線形写像 $f^* \colon \mathrm{Hom}(W, W') \to \mathrm{Hom}(V, W')$ と $g^* \colon \mathrm{Hom}(W, W') \to \mathrm{Hom}(V, W')$ とは等しい．

B 4.13 U, V, W を線形空間とする．線形写像 $f \colon V \to W$ に対し線形写像 $f_* \colon \mathrm{Hom}(U, V) \to \mathrm{Hom}(U, W)$ を対応させる写像 $\mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(U, V), \mathrm{Hom}(U, W))$ は，線形写像であることを示せ．

5　第 5 章の問題

B 5.1 双線形形式 $b\colon M_{nm}(K)\times M_{mn}(K)\to K$ を，$b(A,B)=\mathrm{Tr}\ AB$ で定める．

1．$r_b\colon M_{mn}(K)\to M_{nm}(K)^*$ は，標準基底 E_{ij} を，標準基底 E_{ji} の双対基底にうつすことを示せ．

2．b は非退化であることを示せ．

3．$C\in M_n(K)$ とする．左から C をかける写像 $C\times\colon M_{nm}(K)\to M_{nm}(K)$ の右随伴写像は，右から C をかける写像 $\times C\colon M_{mn}(K)\to M_{mn}(K)$ であることを示せ．

B 5.2 X を集合とし，双線形形式 $b_X\colon K^{(X)}\times K^X\to K$ を，$a\in K^{(X)}, b\in K^X$ に対し，$b_X(a,b)=\sum_{x\in X, a(x)\neq 0} a(x)b(x)$ とおくことで定める．

1．$r_{b_X}\colon K^X\to (K^{(X)})^*$ は同形であることを示せ．

2．$f\colon X\to X$ を写像とする．$f_*\colon K^{(X)}\to K^{(X)}$ を，$x\in X$ に対し，$f_*(e_x)=e_{f(x)}$ とおくことで定める．このとき，f_* の右随伴写像 $f^*\colon K^X\to K^X$ は，$g\colon X\to K$ に合成 $g\circ f\colon X\to K$ を対応させることで定まる写像であることを示せ．

A 5.3 $V=\mathbb{R}^3$ とし，対称行列 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ が定める対称双線形形式 b を考える．

1．b は非退化であることを示せ．

2．V の直交基底を 1 つ求めよ．b の符号数も求めよ．

3．$W=\langle e_1+e_2+e_3\rangle$ の直交 $W^\perp$ の基底を 1 つ与えよ．

4．$W^\perp$ への制限 $b_{W^\perp}$ は非退化であることを示せ．

5．$W'=\langle e_1\rangle$ の直交 $W'^\perp$ を求め，$W'\subset W'^\perp$ を示せ．

6．$B=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ とおく．B 倍写像の随伴写像を行列として求めよ．

A 5.4 $\mathbb{R}$ 双線形形式 $b\colon\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ を，$b(x,y)=\mathrm{Re}\ x\bar{y}$ で定める．これは非退化対称形式であることを示せ．

A 5.5 $b\colon V\times V\to K$ を双線形形式とする．b が対称であるためには，$l_b=r_b$ であることが必要十分であることを示せ．

B 5.6 V を n 次元線形空間とし，b を V の対称双線形形式とする．$x_1,\ldots,x_n\in V$ に対し，次は同値であることを示せ．

（1）対称行列 $A=\begin{pmatrix}b(x_1,x_1)&b(x_1,x_2)&\cdots&b(x_1,x_n)\\b(x_2,x_1)&b(x_2,x_2)&\cdots&b(x_2,x_n)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b(x_n,x_1)&b(x_n,x_2)&\cdots&b(x_n,x_n)\end{pmatrix}$ は可逆である．

（2）b は非退化であり，$x_1,\ldots,x_n$ は V の基底である

B 5.7 nを自然数とする．$V=M_n(K)$ 上の双線形形式 b を $b(X,Y)=\mathrm{Tr}XY$ で定める．

1．b は非退化対称形式であることを示せ．

2．K の標数は 2 でないとする．V の b に関する直交基底を 1 つ求めよ．

3．$W=T_n(K)=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \middle| a_{11},\ldots,a_{n1}\in K\right\}$ のとき，$W^\perp$ を求めよ．

C 5.8 $V=\{$ 連続関数 $\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f(x+1)=f(x)\}$ とし，対称双線形形式 $b\colon V\times V\to K$ を $b(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$ で定める．

1．b は非退化であることを示せ．

2．V の自己準同形 F を $F(f)(x)=f(2x)$ で定める．F の随伴写像を求めよ．

3．$W=\{f\in V|f([0,\frac{1}{2}])=0\}$ とする．$W^\perp$ を求めよ．

A 5.9 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\in M_4(\mathbb{C})$ とする．

1．A と B は正規行列で，A,A^*,B,B^* はどれもたがいに可換であることを示せ．

2．ユニタリ行列 $U\in M_4(\mathbb{C})$ で，U^*AU,U^*BU が対角行列となるものを 1 つ求めよ．

B 5.10 $V=M_{23}(\mathbb{C})$（2 行 3 列行列の全体）とし，エルミート形式 $h:V\times V\to\mathbb{C}$ を $h(X,Y)=\mathrm{Tr}\ {}^tX\overline{Y}$ で定める．次の問に答えよ．

1．h は正定値であることを示せ．

2．$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C}), B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$ とし，V の自己準同形 $f,g:V\to V$ をそれぞれ $f(X)=AX, g(X)=XB$ で定める．f と g の h に関する随伴写像を求めよ．

3．V の h に関する正規直交基底で，f と g の両方に関する固有ベクトルからなるものを 1 つ求めよ．

B 5.11 V を $\mathbb{R}$ 上定義された複素数値無限回微分可能関数 $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ の部分空間 $V=\{f\in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})|f(x+2\pi)=f(x)\}$ とする．写像 $h:V\times V\to\mathbb{C}$ を，$h(f,g)=\int_0^{2\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$ で定め，V の自己準同形 $\Delta:V\to V$ を $\Delta f=f''$ で定める．

1．$h:V\times V\to\mathbb{C}$ は，正定値エルミート形式であることを示せ．

2．V の自己準同形 Δ は，h に関して V のエルミート変換であることを示せ．

3．V の部分空間 W を $W=\langle\cos kx,\sin kx|k=0,\ldots,n\rangle$ で定める．h に関する W の正規直交基底で，Δ の固有ベクトルからなるものを 1 つ求めよ．

A 5.12 $b\colon K^4\times K^4\to K$ を，交代行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が定める交代形式とする．

1．b は非退化であることを示せ.
2．b に関する斜交基底を 1 つ求めよ.

6　第 6 章の問題

A 6.1 1．$n \geq 2$ なら一般線形群 $GL_n(K)$ は非可換であることを示せ.
2．$n \geq 3$ なら対称群 $\mathfrak{S}_n$ は非可換であることを示せ.

A 6.2 写像 $f\colon \mathbb{C}^\times \to GL_2(\mathbb{R})$ を，$f(a+b\sqrt{-1}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ で定める．f は，群の準同形であることを示せ.

A 6.3 $\mathfrak{S}_3$ を 3 次対称群とする．写像 $f\colon \mathfrak{S}_3 \to GL_2(\mathbb{R})$ を，$f(\sigma)$ を

$$\begin{cases} 1 & \sigma = 1 \text{ のとき}, \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} & \sigma = (123) \text{ のとき}, \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} & \sigma = (132) \text{ のとき}, \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \sigma = (12) \text{ のとき}, \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \sigma = (13) \text{ のとき}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \sigma = (23) \text{ のとき}. \end{cases}$$

とおくことで定める.
1．

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = -x_1 - x_2 \in \mathbb{R}^2$$

とおく．各 $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ に対し，$f(\sigma)(x_i) = x_{\sigma(i)}, i = 1, 2, 3$ であることを示せ.
2．$f\colon \mathfrak{S}_3 \to GL_2(\mathbb{R})$ は群の準同形であることを示せ.

A 6.4 群 G が集合 X に作用しているとする．$x, y \in X$ に対し，次の条件は同値であることを示せ.
(1) $y \in Gx$.
(2) $Gx = Gy$.

A 6.5 1．$n \geq 1$ とする．$GL_n(K)$ の K^n への自然な作用について，$GL_n(K)$ 軌道は，$K^n \setminus \{0\}$ と $\{0\}$ の 2 つである.
2．$n \geq 1$ とする．対称群 $\mathfrak{S}_n$ の $\{1, \ldots, n\}$ への自然な作用は可移である.

A 6.6 1．m, n を自然数とする．積集合 $GL_m(K) \times GL_n(K)$ に，乗法を成分ごとに $(P, Q) \cdot (P', Q') = (PP', QQ')$ で定めたものを，群 G とする．$X = M_{mn}(K)$ とする．$(P, Q) \in G$ と $A \in X$ に対し，$(P, Q) \cdot A = PAQ^{-1}$ とおくことで，G の X への左作用を定める．この作用について，X に含まれる G 軌道の個数を求めよ．

2．n を自然数とする．$G = GL_n(\mathbb{R})$ の $X = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | {}^tA = A\}$ への右作用を，$(P, A) \mapsto {}^tPAP$ で定める．X に含まれる G 軌道の個数を求めよ．

B 6.7 n を自然数とする．$G = GL_n(K)$ の $X = \{A \in M_n(K) | A$ は交代行列$\}$ への右作用を，$(P, A) \mapsto {}^tPAP$ で定める．X に含まれる G 軌道の個数を求めよ．

B 6.8 $GL_2(\mathbb{F}_2)$ の $X = \mathbb{F}_2^2 \setminus \{0\}$ への自然な作用が定める群の準同形 $F\colon GL_2(\mathbb{F}_2) \to \mathrm{Aut}(X)$ は同形であることを示せ．

$GL_2(\mathbb{F}_2)$ は 3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ と同形であることを示せ．

A 6.9 $H = \{1, (12)\}$ は 3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ の部分群だが，正規部分群ではないことを示せ．

A 6.10 $n \geq 1$ を自然数とする．

1．有限体 $\mathbb{F}_p$ 上の特殊線形群 $SL_n(\mathbb{F}_p)$ の位数を求めよ．

2．交代群 $\mathfrak{A}_n$ の位数を求めよ．

A 6.11 $f\colon \mathbb{R} \to GL_2(\mathbb{R})$ を，準同形 $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ とする．

1．f の像は，$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \middle| a^2 + b^2 = 1 \right\}$ であることを示せ．

2．f の核は，2π 倍写像 $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ の像であることを示せ．

A 6.12 1．$SO_2(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in GL_2(K) \middle| a^2 + b^2 = 1 \right\}$ を示せ．

2．$SO_2(\mathbb{R}) \to U_1\colon \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + b\sqrt{-1}$ は同形であることを示せ．

B 6.13 1．写像 $f\colon SO_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times$ を，$f\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a + b\sqrt{-1}$ で定める．f は群の同形であることを示せ．

2．$f(SO_2(\mathbb{R}))$ を求めよ．

B 6.14 集合 $\{L \subset K^{n+1} | L$ は 1 次元部分空間$\}$ を n 次元**射影空間** (projective space) とよび，$\mathbf{P}^n(K)$ で表わす．

1．例 1.4.2 のように，K^n を K^{n+1} の部分空間と考え，$\mathbf{P}^{n-1}(K)$ を $\mathbf{P}^n(K)$ の部分集合と考える．$x \in K^n$ に対し，部分空間 $K\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \subset K^{n+1}$ を対応させることで定まる写像 $K^n \to \mathbf{P}^n(K) \setminus \mathbf{P}^{n-1}(K)$ は可逆なことを示せ．

2．$GL_{n+1}(K)$ の $\mathbf{P}^n(K)$ への作用を $A \cdot L = AL$ で定める．この作用は可移であることを示せ．$L = K \cdot e_1 \in \mathbf{P}^n(K)$ の固定部分群は，

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \cdot e_1 & a_2 & \cdots & a_{n+1} \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(K) | a \in K^\times, e_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \text{ は } K^{n+1} \text{ の基底} \right\}$$

であることも示せ．

3．K が有限体 $\mathbb{F}_p$ のときに，$\mathbf{P}^n(\mathbb{F}_p)$ の元の個数を求めよ．

C 6.15 1．K を標数が 2 でない体とし，b を有限次元 K 線形空間 V 上の非退化対称形式とする．$V \neq 0$ ならば，$\det : O(V, b) \to K^\times$ の像は $\{\pm 1\}$ であることを示せ．

2．V を有限次元 $\mathbb{C}$ 線形空間とし，h を V 上の正定値エルミート形式とする．$V \neq 0$ ならば，$\det : U(V, h) \to \mathbb{C}^\times$ の像は $U_1 = \{z \in \mathbb{C}^\times || z| = 1\}$ であることを示せ．

C 6.16 V を K 線形空間とする．自然数 m に対し，$\mathrm{Gr}(V, m) = \{V$ 内の m 次元部分空間全体$\}$ とおく．

1．$X = \mathrm{Gr}(K^n, m)$ への，$GL_n(K)$ の自然な左作用は，可移であることを示せ．

2．$K^m \subset K^n$ の，固定部分群を求めよ．

3．$K = \mathbb{F}_p$ のとき，$\mathrm{Gr}(\mathbb{F}_p^n, m)$ の元の個数を求めよ．

C 6.17 1．直交群 $O_n(\mathbb{R})$ はコンパクトであることを示せ．

2．ユニタリ群 U_n はコンパクトであることを示せ．

例題 6.18 p を素数とする．

1．$GL_2(\mathbb{F}_p)$ の共役類の個数を求めよ．

2．$GL_2(\mathbb{F}_p)$ の各共役類の元の個数を求めよ．

7　第 7 章の問題

A 7.1 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ とする．関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し，次の条件は同値であることを，補題 7.1.1 を使って示せ．

（1）$f(t) = g(\cos t, \sin t)$ をみたす関数 $g : S^1 \to \mathbb{R}$ が存在する．

（2）$t \in \mathbb{R}$ に対し $f(t + 2\pi) = f(t)$ がなりたつ．

A 7.2 $V = \mathbb{C}^3$ とし，e_1, e_2, e_3 を標準基底とする．W を部分空間 $\mathbb{C} \cdot (e_1 + e_2 + e_3)$ とする．$\overline{e_2 - e_1}, \overline{e_3 - e_2}$ は V/W の基底であることを示せ．$\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ をそれぞれ $\overline{e_2 - e_1}, \overline{e_3 - e_2}$ の線形結合として表わせ．

B 7.3 V を線形空間とし，$W \subset V$ を部分空間とする．$p \colon V \to V/W$ を商空間への標準全射とする．V' に対し，V'/W を対応させる写像

$$\{W \text{ を含む } V \text{ の部分空間}\} \to \{V/W \text{ の部分空間}\}$$

は可逆であることを示せ．逆写像は，V/W の部分空間 W' に対し，逆像 $p^{-1}(W')$ を対応させることで与えられることを示せ．

A 7.4 問題 7.2 のとおり，$V = \mathbb{C}^3$，W を部分空間 $\mathbb{C} \cdot (e_1 + e_2 + e_3)$ とする．

1．$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とし，$f \colon V \to V$ を A 倍写像，$\bar{f} \colon V/W \to V/W$ を f がひきおこす線形写像とする．$\bar{f}$ の，基底 $\overline{e_2 - e_1}, \overline{e_3 - e_2}$ に関する行列表示を求めよ．

2．$\bar{f}$ は対角化可能であることを示し，固有ベクトルからなる V/W の基底を 1 つ与えよ．

A 7.5 $V = K^5$ とし，$e_1, \ldots, e_5$ を標準基底とする．W を部分空間 $\langle e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_4 - e_5 \rangle$ とする．線形写像 $f \colon K^5 \to K^2 \colon \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_4 + x_5 \end{pmatrix}$ に準同形定理を適用して，同形 $V/W \to K^2$ が得られることを示せ．

A 7.6 $a_1, \ldots, a_n \in K$ を相異なる元とし，$f(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_n)$ とする．線形写像 $F \colon K[X] \to K^n$ を $F(g) = (g(a_1), \ldots, g(a_n))$ で定める．F は同形 $K[X]/(f) \to K^n$ をひきおこすことを示せ．

A 7.7 全射 $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{C} \colon f \mapsto f(\sqrt{-1})$ の核は $(X^2 + 1)$ であることを示し，この全射に準同形定理を適用して，$\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}[X]$ の商空間として表わせ．

B 7.8 V, V' を線形空間とし，$W \subset V, W' \subset V'$ をそれぞれの部分空間とする．$f \colon V \to V'$ を線形写像で，$f(W) \subset W'$ をみたすものとする．$\bar{f} \colon V/W \to V'/W'$ を f がひきおこす線形写像とする．

1．$\bar{f} \colon V/W \to V'/W'$ が単射であるためには，$f^{-1}(W') = W$ が必要十分であることを示せ．

2．$\bar{f} \colon V/W \to V'/W'$ が全射であるためには，$V' = f(V) + W'$ が必要十分であることを示せ．

B 7.9 V を線形空間とし，$W \subset W' \subset V$ をその部分空間とする．命題 7.3.7.2 の標準同形 $(V/W)^* \to W^\perp$ の逆写像と，包含写像の双対 $(V/W)^* \to (W'/W)^*$ の合成 $W^\perp \to (W'/W)^*$ は，同形 $W^\perp / W'^\perp \to (W'/W)^*$ をひきおこすことを示せ．

B 7.10 V を有限次元 K 線形空間とし，f を V の自己準同形とする．W を V の部分空間で $f(W) \subset W$ をみたすものとする．f の $V, W, V/W$ での固有多項式をそれぞれ $\Phi_V, \Phi_W, \Phi_{V/W}$ とすると，$\Phi_V = \Phi_W \cdot \Phi_{V/W}$ がなりたつことを示せ．

B 7.11 V の部分空間 W, W' について, 次の条件は同値であることを示せ．

（1）$V = W \oplus W'$．

（2）標準全射の直和 $V \to V/W \oplus V/W'$ は同形である．

C 7.12 V を有限次元線形空間とし，N を $N^{m+1} = 0$ をみたす V の自己準同形とする．

1．V の部分空間の列 $V = W_m \supset W_{m-1} \supset \cdots \supset W_{-m} \supset W_{-m-1} = 0$ で，次の条件をみたすものがただ 1 つ存在することを示せ．

（1）$-m \leq i \leq m$ に対し，$NW_i \subset W_{i-2}$

（2）$0 \leq i \leq m$ に対し，N^i は同形 $W_i/W_{i-1} \to W_{-i}/W_{-i-1}$ をひきおこす．

2．$m=1$ のときは，$W_0 = \mathrm{Ker}\ f, W_{-1} = \mathrm{Im}\ f$ であることを示せ．

3．$V = \bigoplus_{0\leq p\leq m, 0\leq q\leq m-p} V_{p,q}$ を定理 3.4.2 の条件を満たす直和分解とする．このとき，$W_i = \bigoplus_{p-q\leq i} V_{p,q}$ であることを示せ．

C 7.13 V を線形空間とし，W, W' をその部分空間とする．線形写像

$$V \xrightarrow{f} (V/W) \oplus (V/W') \xrightarrow{g} V/(W+W')$$

を $f(x) = (\bar{x}, \bar{x})$，$g(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} - \bar{y}$ で定める．このとき，$0 \to W \cap W' \to V \xrightarrow{f} (V/W) \oplus (V/W') \xrightarrow{g} V/(W+W') \to 0$ は完全系列であることを示せ．

C 7.14 $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ を有理数列の空間とし，$V = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} | \lim_{n\to\infty} x_n \text{は収束}\}$ を収束列のなす部分空間，$W = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} | \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ を 0 に収束する列のなす部分空間とする．$x \in V$ に対し，$\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$ を対応させる写像 $f\colon V \to \mathbb{R}$ は，同形 $\bar{f}\colon V/W \to \mathbb{R}$ をひきおこすことを示せ．

補足　有理数体 $\mathbb{Q}$ を使って，実数体を $\mathbb{R}$ を定義するには，$\mathbb{R}$ を使わずに，問題 7.14 の線形空間 V を定義すればよい．そうすれば，$\mathbb{R}$ を上のように商空間として構成することができる．

C 7.15 $K = \mathbb{F}_p$ とする．問題 2.23 の線形写像 $F\colon K[X] \to \{K \text{から} K \text{への写像}\}, f \mapsto (x \mapsto f(x))$ は，同形 $K[X]/(X^p - X) \to \{K \text{から} K \text{への写像}\}$ をひきおこすことを示せ．

8　第 8 章の問題

A 8.1 行列の積 $M_{lm}(K) \times M_{mn}(K) \to M_{ln}(K)$ は K 双線形写像であることを示せ．

B 8.2 V と W を線形空間とする．写像 $F\colon V \times \mathrm{Hom}(V, W) \to W$ を，$F(x, f) = f(x)$ で定める．F は双線形写像であることを示せ．

A 8.3 e_1, e_2 を $\mathbb{R}^2$ の標準基底とする．$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ を，基底 $e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2$ の線形結合として表わせ．

例題 8.4 $x \in V, y \in W$ とする．

1．次は同値であることを示せ．

（1）$x \otimes y \neq 0$.

（2）$x \neq 0$ かつ $y \neq 0$.

2．$x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ とする．$x' \in V, y' \in W$ に対し，次の条件は同値であることを示せ．

（1）$x \otimes y = x' \otimes y'$.

（2）$x' = ax, y' = a^{-1}y$ をみたす $a \in K^\times$ がある．

A 8.5 x_1, x_2 が V の基底，y_1, y_2 が W の基底とすると，$x_1 \otimes y_1, x_1 \otimes y_2, x_2 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2$ は $V \otimes W$ の基底である．$t = ax_1 \otimes y_1 + bx_1 \otimes y_2 + cx_2 \otimes y_1 + dx_2 \otimes y_2 \in V \otimes W$ について，次の条件は同値であることを示せ．

（1）$t = x \otimes y$ をみたす $x \in V, y \in W$ が存在する．

（2）$ad = bc$ である．

A 8.6 $x, y \in V$ について，次の条件は同値であることを示せ．

（1）x, y は 1 次独立である．

（2）$x \otimes y \neq y \otimes x$ である．

A 8.7 $x_1, \ldots, x_m$ と $x'_1, \ldots, x'_m$ を V の基底とし，$y_1, \ldots, y_n$ と $y'_1, \ldots, y'_n$ を W の基底とする．$P \in GL_m(K)$ を $x_1, \ldots, x_m$ から $x'_1, \ldots, x'_m$ への底の変換行列とし，$Q \in GL_n(K)$ を $y_1, \ldots, y_n$ から $y'_1, \ldots, y'_n$ への底の変換行列とする．$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{mn}(K)$ に対し，次の条件は同値であることを示せ．

（1）$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i \otimes y_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} x'_i \otimes y'_j$

（2）$A = PB{}^tQ$.

B 8.8 $x_1, \ldots, x_r \in V, y_1, \ldots, y_r \in W$ とする．$t = x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2 + \cdots + x_r \otimes y_r$ について，次のことを示せ．

1．$x_1, \ldots, x_s$ が $\langle x_1, \ldots, x_r \rangle$ の基底ならば，$y'_1, \ldots, y'_s \in W$ で，$t = x_1 \otimes y'_1 + x_2 \otimes y'_2 + \cdots + x_s \otimes y'_s$ をみたすものが，ただ 1 組存在する．

2．次の条件は同値であることを示せ．

（1）$x_1, \ldots, x_r \in V, y_1, \ldots, y_r \in W$ は 1 次独立である．

（2）$x'_1, \ldots, x'_s \in V, y'_1, \ldots, y'_s \in W$ が，$t = x'_1 \otimes y'_1 + x'_2 \otimes y'_2 + \cdots + x'_s \otimes y'_s$ をみたすならば，$s \geq r$ である．

3．$x_1, \ldots, x_r \in V, y_1, \ldots, y_r \in W$ が 1 次独立であるとする．$t = x'_1 \otimes y'_1 + x'_2 \otimes y'_2 + \cdots + x'_r \otimes y'_r$ ならば，$x'_1, \ldots, x'_r$ は $\langle x_1, \ldots, x_r \rangle$ の基底であり，$y'_1, \ldots, y'_r$ は $\langle y_1, \ldots, y_r \rangle$ の基底である．さらに，$x_1, \ldots, x_r$ から $x'_1, \ldots, x'_r$ への底の変換行列を $A \in GL_r(K)$，$y_1, \ldots, y_r$ から $y'_1, \ldots, y'_r$ への底の変換行列を $B \in GL_r(K)$ とすると，$A{}^tB = 1$ がなりたつ．

B 8.9 1．複素数の乗法が定める $\mathbb{R}$ 線形写像 $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ の，基底 $1 \otimes 1, \sqrt{-1} \otimes 1, 1 \otimes \sqrt{-1}, \sqrt{-1} \otimes \sqrt{-1}$ と $1, \sqrt{-1}$ に関する行列表示を求めよ．

2．$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ を $x \otimes y \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ x\bar{y} \end{pmatrix}$ で定める．これは同形であることを示せ．

B 8.10 1．K を体とすると，$K[X] \otimes K[Y] \to K[X, Y]\colon f \otimes g \mapsto fg$ は同形である．

2．$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}[X]\colon a \otimes f \mapsto af$ は同形である．

B 8.11 V, W, V' を線形空間とする．線形写像 $f\colon V \otimes W \to V'$ と $x \in V$ に対し，線形写像 $g_f(x)\colon W \to V'$ を，$g_f(x)(y) = f(x \otimes y)$ で定める．

1．$x \in V$ に対し $g_f(x)$ を対応させる写像 $g_f\colon V \to \mathrm{Hom}(W, V')$ は線形写像であることを示せ．

2．f に対し $g_f \in \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(W, V'))$ を対応させる線形写像 $\mathrm{Hom}(V \otimes W, V') \to \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(W, V'))$ は，同形であることを示せ．

A 8.12 V, W を線形空間とし，$x_1, \ldots, x_n$ を V の基底，$y_1, \ldots, y_m$ を W の基底とする．$f_1, \ldots, f_n$ を V^* の双対基底，$g_1, \ldots, g_m$ を W^* の双対基底とする．$f_1 \otimes g_1, \ldots, f_1 \otimes g_m, \ldots, f_n \otimes g_1, \ldots, f_n \otimes g_m \in (V \otimes W)^*$ は，$x_1 \otimes y_1, \ldots, x_1 \otimes y_m, \ldots, x_n \otimes y_1, \ldots, x_n \otimes y_m$ の双対基底であることを示せ．

A 8.13 $e_1, \ldots, e_n \in K^n$ を標準基底とし，$f_1, \ldots, f_n \in (K^n)^*$ をその双対基底とする．標準写像 $K^m \otimes (K^n)^* \to \mathrm{Hom}(K^n, K^m) = M_{mn}(K)$ による，$K^m \otimes (K^n)^*$ の基底 $e_i \otimes f_j$ の像は，行列単位 E_{ij} であることを示せ．

B 8.14 V を有限次元線形空間とする．$K \otimes V$ と $V \otimes K$ を V と同一視し，線形写像 $f : K \to V$ と $g : V \to K$ のテンソル積 $f \otimes g : K \otimes V \to V \otimes K$ を，V の自己準同形と考える．図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(K, V) \otimes \mathrm{Hom}(V, K) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_1 \otimes \mathrm{id}} & V \otimes V^* \\
{\scriptstyle f\otimes g \mapsto f \otimes g}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle x \otimes f \mapsto f(x)} \\
\mathrm{Hom}(V, V) & \xrightarrow{\mathrm{Tr}} & K
\end{array}$$

は可換であることを示せ．

B 8.15 V, W を線形空間とする．$\mathrm{Hom}(K, V)$ と $V \otimes K$ を V と同一視し，$K \otimes W$ を W と同一視する．線形写像 $f : K \to V$ と $g : W \to K$ のテンソル積 $f \otimes g : K \otimes W \to V \otimes K$ を，線形写像 $W \to V$ と考え，標準写像

$$T : V \otimes W^* = \mathrm{Hom}(K, V) \otimes \mathrm{Hom}(W, K) \to \mathrm{Hom}(W, V)$$

を定める．

1．T は，V, W のどちらか一方が有限次元ならば同形であることを示せ．

2．T が定める双線形写像 $V \times W^* \to \mathrm{Hom}(W, V)$ の像は，$\{$ 階数が 1 以下の線形写像 $W \to V\}$ であることを示せ．

3．$T : V \otimes W^* \to \mathrm{Hom}(W, V)$ は単射であり，その像は $\{$ 階数が有限の線形写像 $W \to V\}$ であることを示せ．

A 8.16 $x, y \in V$ とする．

1．次の条件は同値であることを示せ．

（1）$x \wedge y \neq 0$.

（2）x, y は 1 次独立．

2．x, y は 1 次独立とする．$x', y' \in V$ に対し，次の条件は同値であることを示せ．

（1）$x \wedge y = x' \wedge y'$.

（2）$x' = ax + by, y' = cx + dy$ をみたす $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in SL_2(K)$ がある．

A 8.17 $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ とする．

1．x とベクトル積 $y \times z$ の内積 $(x, y \times z)$ は，x, y, z をならべて得られる行列 $X \in M_3(\mathbb{R})$ の行列式 $\det X$ と等しいことを示せ．

2．ベクトル積 $x \times y$ は，x, y と直交することを示せ．

3．ベクトル積 $x \times y$ の長さは，x, y のはる平行四辺形の面積と等しいことを示せ．

B 8.18 1．$x_1,\dots,x_r \in V$ に対し，次は同値であることを示せ．

（1）$x_1,\dots,x_r$ は1次独立である．

（2）$x_1\wedge\cdots\wedge x_r \in \Lambda^r V$ は0でない．

2．$n=\dim V$ とする．$x_1,\dots,x_n \in V$ に対し，次は同値であることを示せ．

（1）$x_1,\dots,x_n$ は V の基底である．

（2）$x_1\wedge\cdots\wedge x_n$ は $\Lambda^n V$ の基底である．

B 8.19 V を線形空間とし，V^* を双対空間とする．$r\geq 0$ を自然数とする．

1．$(f_1,\dots,f_r)\in(V^*)^{\times r}$ を線形形式 $f_1\wedge\cdots\wedge f_r : \Lambda^r V\to K$ にうつす写像 $F:(V^*)^{\times r}\to(\Lambda^r V)^*$ は，交代 r 重線形写像であることを示せ．

2．V が有限次元ならば，$F:(V^*)^{\times r}\to(\Lambda^r V)^*$ が定める線形写像 $\Lambda^r(V^*)\to(\Lambda^r V)^*$ は同形であることを示せ．

B 8.20 V の交代双線形形式 $b\colon V\times V\to K$ と，自然数 r に対し，次の条件は同値であることを示せ．

（1）$\dim V/V^\perp \leq 2r$.

（2）線形形式 $f_1,\dots,f_{2r}\colon V\to K$ で，$b=f_1\wedge f_{r+1}+f_2\wedge f_{r+2}+\cdots+f_r\wedge f_{2r}$ をみたすものが存在する．

C 8.21 V を線形空間とし，$b\colon V\times V\to K$ を交代形式とする．

1．$n\geq 0$ を自然数とし，$\mathfrak{S}'_{2n}=\{\sigma\in\mathfrak{S}_{2n}|\sigma(1)<\cdots<\sigma(n),\sigma(i)<\sigma(n+i)\ (i=1,\dots,n)\}$ とおく．$2n$ 重線形写像 $P_{2n}(b):V^{\times 2n}\to K$ を，

$$P_{2n}(b)(x_1,\dots,x_{2n})=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}'_{2n}}\mathrm{sgn}(\sigma)b(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(n+1)})\cdots b(x_{\sigma(n)},x_{\sigma(2n)})$$

で定める．$P_{2n}(b)$ は交代であることを示せ．

2．以下，V が有限次元であるとする．問題 *8.4.4* の標準同形により $\Lambda^{2n}V^*$ と $(\Lambda^{2n}V)^*$ を同一視し，$P_{2n}(b)$ が定める線形形式も $P_{2n}(b)\in(\Lambda^{2n}V)^*=\Lambda^{2n}V^*$ で表わす．$b^{\wedge n}=P_2(b)\wedge\cdots\wedge P_2(b)\in\Lambda^{2n}V^*$ は，$(-1)^{\binom{n}{2}}n!\cdot P_{2n}(b)$ と等しいことを示せ．

3．V の自己準同形 f に対し，$P_{2n}(f^*b)=\Lambda^{2n}f^*(P_{2n}(b))$ を示せ．

4．以下，$\dim V=2n$ とし，$P_{2n}(b)\in\Lambda^{2n}V^*$ を $\mathrm{Pf}(b)$ で表わす．次の条件は同値であることを示せ．

（1）b は非退化である．

（2）$\mathrm{Pf}(b)\neq 0$.

5．b が非退化ならば，$Sp(V,b)\subset SL(V)$ であることを示せ．

6．$x_1,\dots,x_{2n}$ を V の斜交基底とし，$f_1,\dots,f_{2n}\in V^*$ をその双対基底とする．$b=f_1\wedge f_{n+1}+f_2\wedge f_{n+2}+\cdots+f_n\wedge f_{2n}$ であり，$\mathrm{Pf}(b)=f_1\wedge\cdots\wedge f_{2n}$ であることを示せ．