

書 評

Robert Lazarsfeld: Positivity in Algebraic Geometry I, II,
Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), 48, 49, Springer, 2004 年, 387, 385 ページ.

高 木 俊 輔

本書には “Positivity in Algebraic Geometry” という題名が付けられており、事実、直線束ないしベクトル束の豊富性から敷衍される様々な “positivity” が登場する¹⁾。しかしこれはあくまで本に題名をつけるための方便のようなものであり、実際は著者のこれまでの研究成果をまとめて本にしたものという印象を評者は受けた。本書で扱われている話題は多岐に及ぶが、大まかに言えば、線形系の漸近挙動、ベクトル束の豊富性、乗数イデアル層の 3 つのテーマが網羅的に扱われている。特に乗数イデアル層に関しては初めての専門的教科書であり、本書のニーズは高いものと思われる。

本書は 3 部構成になっており、各部は序文と複数の章から構成されている。さらに各章の冒頭にはその章の内容の概説が、章末には参考文献と共にその章の内容の歴史的背景が述べられており、できる限り章ごとに独立して読めるように配慮されている。本書を読むに当たっての予備知識としては、代数幾何の標準的な入門書である [4] の内容を知っていれば十分である。定理の証明も丁寧に書かれており、例も豊富で (例と注意で本書の約 3 分の 1 近くを占める)、最小限の知識で最先端の研究成果まで理解出来るように配慮されている。本書は [4] 読了後に読む教科書として新たな選択肢となるであろうし、上に挙げたテーマに関して辞書的に使用することも可能であろう。以下で各部の詳しい内容について述べる。

第 1 部: Ample Line Bundles and Linear Series (第 1 章 ~ 第 5 章)

第 1 部は直線束 (因子) と線形系の基本的性質に当てられている。第 1 章では直線束の豊富性に関する基礎事項を復習した後、 $\mathbb{Q}$ -因子、ネフ因子等の概念が導入され、さらには Néron-Severi 空間における錐体の理論 (Kleiman の豊富性判定法、錐定理²⁾ など) が展開されている。第 1 章の最後では、コホモロジーの消滅に必要な豊富な直線束の捻り具合を測る不変量である、Castelnuovo-Mumford 正則数についても触れられている。第 2 章では線形系の漸近挙動に目を向け、豊富性の双有理的類似である巨大性の概念が導入され、巨大な因子の性質、さらにはそれに付随する線形系の性質が調べられている。第 3 章では Lefschetz の定理、余次元が小さい射影部分多様体の性質に関する Barth の定理、そして Bertini の連結性定理と Fulton-Hansen によるその一般化など位相幾何的な性質に焦点が当てられている。第 4 章は直線束のコホモロジーの消滅定理の解説である。小平の消滅定理から始まり、中野の消滅定理、弱い形の川又-Viehweg の消滅定理 (ネフで巨大な直線束に対する消滅定理、一方 $\mathbb{Q}$ -因子に対する川又-Viehweg の消滅定理は第 9 章で証明される)、さらには Green-Lazarsfeld の一般消滅定理 (generic vanishing, $\text{Pic}^0(X)$ の一般の元に対する消滅定理) が証明されている。第 5 章は (豊富な) 直線束の局所的な豊富性を測る不変量である Seshadri 定数の解説である。Ein-Lazarsfeld-Küchle によって与えられた Seshadri 定数の下限が証明されている³⁾。

第 2 部: Positivity for Vector Bundles (第 6 章 ~ 第 8 章)

豊富な直線束の理論を高階のベクトル束の場合に拡張しようと, Grauert, Griffiths, Hartshorne 等によって, 様々な “positivity” が 60 年代に導入された. 第 2 部では, 今日最も標準的な定義だと思われる Hartshorne の流儀に従って, ベクトル束の豊富性が解説されている. 第 6 章ではベクトル束の豊富性, ネフ性の定義, その基本的性質と共に, 豊富なベクトル束の例が多数挙げられている. 第 7 章では, Sommese, Bloch–Gieseker による Lefschetz の定理のベクトル束の場合への拡張, 退化跡 (degeneracy loci) の連結性に関する Fulton–Lazarsfeld の定理とその Brill–Noether 理論への応用, 小平の消滅定理のベクトル束の場合への拡張 (Le Potier の消滅定理など) など直線束に関する定理の類似が述べられている. 第 8 章では豊富なベクトル束の数値的性質に焦点が当てられている. 第 2 部のハイライトとして, 豊富なベクトル束に対して数値的的正な多項式の錐は Schur 多項式によって生成されるという Fulton–Lazarsfeld の定理が証明されている.

第 3 部: Multiplier Ideals and Their Applications (第 9 章 ~ 第 11 章)

本書の目玉は第 3 部であろう. 第 1 部, 第 2 部では古典的な代数幾何の話題を扱ってきたのに対し, 第 3 部では乗数イデアル層を中心に据えて高次元代数幾何における最近 (90 年代後半から 2000 年代初頭) の進展が述べられている. 乗数イデアル層は, Kohn により $\bar{\partial}$ -Neumann 問題の解析の際に導入され, Nadel により Fano 多様体上の Kähler–Einstein 計量の存在を研究する際に幾何学に応用された, 直線束の特異エルミート計量に付随するイデアル層である. このイデアル層は局所二乗可積分性を用いて定義されるが, $\mathbb{Q}$ -因子に付随する特異エルミート計量のみ考える場合は, 特異点解消を用いて代数的に定式化できる. 本書で扱われているのはこの代数的な乗数イデアル層である. 代数的な乗数イデアル層は Esnault–Viehweg の本 [2] や Lipman の論文 [9]⁴⁾ に既に登場しているが, 本書ではより体系的そして網羅的にこのイデアル層の性質や応用を調べている. 以下, 章ごとに第 3 部の内容を見ていこう.

第 9 章では川又–Viehweg の消滅定理に始まり, 乗数イデアル層の定義, 例, 定義から従う基本的性質, そして消滅定理から従う局所的性質などが列挙されている. 本書では特異点の扱いにあまり重きが置かれず, ほとんどの場合多様体は非特異と仮定されている. しかしながら極小モデル理論や可換環論等への応用を考える上で特異点は避けて通れない障壁となるので, 通読の際はこの点に注意されたい. また第 9 章の最後では, 乗数イデアル層の局所的性質 (Skoda の定理) の応用として, 環が標数 0 の正則アフィン環の場合に, Briançon–Skoda の定理 (R を正則環とし, $I \subseteq R$ を l 個の元で生成されるイデアルとしたとき, 任意の整数 $n \geq 0$ に対し I^{n+l} の整閉包は I^{n+1} に含まれる⁵⁾) が証明されている. Briançon–Skoda の定理は, 環が等標数の場合には密着閉包 (tight closure) を用いた別証明 [5] が知られており, 乗数イデアル層の理論と密着閉包の理論の接点の 1 つとなっている.

第 10 章では乗数イデアル層の応用が述べられている. その中で特に重要だと思われるものを列挙すると, 主偏極アーベル多様体のテータ因子の特異点に関する Ein–Lazarsfeld の定理, 松阪の定理 (豊富な直線束 L が与えられたとき, 交点数 $(L^n), (K_X \cdot L^{n-1})$ のみに依存する整数 M が存在して, 任意の整数 $n \geq M$ に対し $L^{\otimes n}$ は非常に豊富になる) の Siu, Demailly による別証明, 随伴束 ($K_X + L$ という形の直線束, ただし L は豊富な直線束) の大域生成性に関する Angehrn–Siu の定理の Kollár による代数的証明などがある. これらの結果は乗数イデアル層が如何に強力な道具に成り得るかを示す一例を与えていると言えるだろう.

第 11 章では、線形系等の漸近挙動を調べるために、漸近乗数イデアル層という概念が導入されている。漸近乗数イデアル層は乗数イデアル層の族の（包含関係に関する）極大元として定義され、乗数イデアル層と類似の性質を満たす。この漸近乗数イデアル層の応用例として、本書では次の 3 つの結果を紹介している。最初の応用例は、標数 0 の正則アフィン環のイデアルの記号冪の増大度に関する Ein–Lazarsfeld–Smith の定理である。イデアルの記号冪は可換環論における古典的な題材でありながら、その挙動については未解明な部分が多く、漸近乗数イデアル層という代数幾何的な道具を用いて記号冪に関する結果が得られたことは、多くの可換環論学者に衝撃を与えた。その後 Hochster–Huneke [6] は密着閉包の理論を用いて Ein–Lazarsfeld–Smith の結果を等標数の場合に拡張したが、ここにも乗数イデアル層の理論と密着閉包の理論の接点が見える。2 つ目の応用例は、巨大な因子の体積に関する藤田の近似定理の別証明である。さらに藤田の近似定理の応用として、Boucksom–Demailly–Păun–Peternell の定理（擬有効因子の錐の閉包は可動曲線の錐の閉包と双対である）が証明されている。そして 3 つ目の応用例は、一般型多様体の多重種数の変形不変性の代数的証明である。一般型多様体の多重種数の変形不変性は元々 Siu によって解析的に証明されたが、本書では漸近乗数イデアル層を用いて証明を代数化している⁶⁾。川又と中山も類似の手法を用いて Siu の証明を代数化し、さらに様々な一般化も行った ([7], [8], [11])。特に川又 [7] は標準特異点の変形不変性を、中山 [11] は端末特異点の変形不変性を証明した。これらの結果は漸近乗数イデアル層の真価を伝える格好の例となっているため、本書に収録されていないのはいささか残念である。

本書の出版後、極小モデル理論は著しく進展し、Hacon–McKernan によって pl フリップの存在が証明された。この証明には漸近乗数イデアル層を用いた拡張定理が極めて有効に使われている。興味ある読者は [1] の 5 章を参照されたい。本書の出版後に得られた、漸近乗数イデアル層の応用例としては、多重標準線形系に関する有界性定理 (n 次元一般型代数多様体 X に対して、 n にしか依らない整数 m_n が存在して、 $m \geq m_n$ ならば多重標準線形系 $|mK_X|$ は双有理写像を与える) もある ([3], [13])。また本書に収録されている定理の幾つかは既に改良されているので注意が必要である（例えば [12] 参照）。

注 釈

- 1) 但し、Hodge 理論的、複素幾何的な内容はほとんど扱われていない。
- 2) 但し、錐定理の証明は割愛されている。
- 3) Seshadri 定数の下限の最良と思われる評価は予想として述べられている。
- 4) Lipman はこのイデアルを “adjoint ideal” と呼んでいる。
- 5) この形の Briançon–Skoda の定理は Lipman–Sathaye [10] によって証明された。
- 6) その後 Siu は一般型という仮定を外して多重種数の変形不変性を証明したが、この場合には代数的な証明は知られていない。

文 献

- [1] Flips for 3-folds and 4-folds, edited by Alessio Corti, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, **35**. Oxford University Press, Oxford, 2007.

- [2] H. Esnault and E. Viehweg, Lectures on vanishing theorems, DMV Seminar, **20**. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.
- [3] C. Hacon and J. McKernan, Boundedness of pluricanonical maps of varieties of general type, Invent. Math. **166** (2006), 1–25.
- [4] R. Hartshorne, Algebraic geometry, Graduate Texts in Mathematics, **52**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [5] H. Hochster and C. Huneke, Tight closure, invariant theory, and the Briançon–Skoda theorem, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 31–116.
- [6] H. Hochster and C. Huneke, Comparison of symbolic and ordinary powers of ideals, Invent. Math. **147** (2002), 349–369.
- [7] Y. Kawamata, Deformations of canonical singularities, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), 85–92.
- [8] Y. Kawamata, On the extension problem of

4

書

評

- pluricanonical forms, Algebraic geometry: Hirzebruch 70 (Warsaw, 1998), 193–207, Contemp. Math., **241**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [9] J. Lipman, Adjoints of ideals in regular local rings, with an appendix by Steven Dale Cutkosky, Math. Res. Lett. **1** (1994), 739–755.
- [10] J. Lipman and A. Sathaye, Jacobian ideals and a theorem of Briançon–Skoda, Michigan Math. J. **28** (1981), 199–222.
- [11] N. Nakayama, Zariski-decomposition and abundance, MSJ Memoirs, **14**, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004.
- [12] S. Takagi, Formulas for multiplier ideals on singular varieties, Amer. J. Math. **128** (2006), 1345–1362.
- [13] S. Takayama, Pluricanonical systems on algebraic varieties of general type, Invent. Math. **165** (2006), 551–587.

(2009年7月21日提出)

(たかぎ しゅんすけ・九州大学大学院数理学研究院)