

変数係数シュレディンガー発展方程式の基本解について

「数理科学セミナー」2009年9月21日

中村周（伊藤健一さんとの共同研究）

1 モデルの定義、問題の設定

この講演では、ユークリッド空間 \mathbb{R}^n 上の変数係数シュレディンガー方程式：

$$\begin{aligned}i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) &= H \psi(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \\ \psi(t, 0) &= \psi_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n), \\ H &= -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} a_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} + V(x),\end{aligned}$$

を考える。ただし $a_{jk}(x), V(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ であり、各 $x \in \mathbb{R}^n$ について $(a_{jk}(x)) > 0$ 、しかも以下の仮定をみたすとする：

仮定 A. $\mu > 0$ が存在して、任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して

$$\begin{aligned}|\partial_x^\alpha (a_{jk}(x) - \delta_{jk})| &\leq C_\alpha \langle x \rangle^{-1-\mu-|\alpha|}, \\ |\partial_x^\alpha V(x)| &\leq C_\alpha \langle x \rangle^{1-\mu-|\alpha|}.\end{aligned}$$

すると、よく知られているように H は定義域を $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ として、 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上で本質的自己共役である。その唯一の自己共役拡張も、同じ記号 H で表す。すると、シュレディンガー方程式の解は、

$$\psi(t, x) = (e^{-itH} \psi_0)(x)$$

であることが、ストーンの定理からしたがう。つまり、時間発展は e^{-itH} で与えられる。 e^{-itH} それ自身は、(Hörmander の意味での) フーリエ積分作用素で書けないことは簡単に分かる（特異性の伝播を考えればよい）。そこで、この作用素をフーリエ積分作用素と、性質のよく分かっている、自由な時間発展の作用素の積で書くことが、この講演の主題である。自由なシュレディンガー作用素を

$$H_0 = -\frac{1}{2} \Delta \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{D}(H_0) = H^2(\mathbb{R}^n)$$

とすると、 H_0 は自己共役である。このとき：

$$(Q1) \quad W(t) = e^{itH_0} e^{-itH} \quad \text{はフーリエ積分作用素か？}$$

という問題を考えよう。 W がフーリエ積分作用素ならば、

$$e^{-itH} = e^{-itH_0} W(t)$$

であり、 e^{-itH_0} の積分核はよく知られているので、 e^{-itH} のフーリエ積分作用素と積分作用素の積としての表現が得られることになる。

2 背景：これまでの結果と経緯

解の波面集合の特徴付け:

この研究の動機としては、以下のような以前の結果がある (N 2009(JFA))。

定義 1 (波面集合). $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n} \simeq T^*\mathbb{R}^n$, $\xi_0 \neq 0$, とする。 $(x_0, \xi_0) \notin WF(u)$ とは、ある $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(x_0) \neq 0$ と ξ_0 のコニックな近傍 $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ が存在して、任意の N について

$$|\mathcal{F}(\varphi u)(\xi)| \leq C_N \langle \xi \rangle^{-N}, \quad \xi \in \Gamma,$$

が成り立つことである。 $WF(u) \subset T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ を、 u の波面集合 (wavefront set) と呼ぶ。ただし、 M を多様体とするとき、

$$T^*M \setminus 0 = \{(x, \xi) \in T^*M \mid \xi \neq 0\}$$

と書くことにする。

古典力学系:

上で与えられたような $a_{ij}(x)$, $V(x)$ に対して、対応する古典力学のハミルトン関数を、

$$k(x, \xi) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \xi_j \xi_k, \quad p(x, \xi) = k(x, \xi) + V(x)$$

と書くことにする。ハミルトン・ベクトル場は

$$H_k = \frac{\partial k}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial k}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad H_p = \frac{\partial p}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi},$$

これらが生成する $T^*\mathbb{R}^n$ 上のハミルトン流を、

$$\exp tH_k, \quad \exp tH_p \quad t \in \mathbb{R},$$

など、と書くことにしよう。

定義 2 (nontrapping condition). $(x_0, \xi_0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ とするとき、 (x_0, ξ_0) が (k に関して) *forward nontrapping* (*backward nontrapping*, resp.) とは、

$$(y(t), \eta(t)) = \exp tH_k(x_0, \xi_0)$$

と書くとき、

$$|y(t)| \rightarrow +\infty \quad (t \rightarrow \pm\infty)$$

であること。

古典力学的散乱理論：

以上の仮定の下で、 $(x_0, \xi_0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ が forward (backward, resp.) nontrapping であると仮定するとき、

$$\xi_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \eta(t), \quad z_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (y(t) - t\eta(t))$$

が存在する。

$$w_{\pm} : (x_0, \xi_0) \mapsto (z_{\pm}, \xi_{\pm})$$

は、局所微分同相であり、「古典力学的 (逆) 波動作用素」である。あるいは、

$$(z_{\pm}, \xi_{\pm}) = w_{\pm}(x_0, \xi_0) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \exp(-tH_{p_0}) \circ \exp(tH_k)(x_0, \xi_0)$$

と書いても良い。ここで、 $p_0 = \frac{1}{2}|\xi|^2$ は、自由粒子のハミルトニアンである。 (z_{\pm}, ξ_{\pm}) は、以下のような意味で、古典力学的な「散乱データ」である。

$$y(t) \sim z_{\pm} + t\xi_{\pm} \quad (t \rightarrow \pm\infty).$$

つまり、 $z_{\pm} + t\xi_{\pm}$ が、 $t \rightarrow \pm\infty$ で古典軌道 $y(t)$ の漸近する自由な軌道である。

定理 2.1 ([5]). $(x_0, \xi_0) \in T^*\mathbb{R}^n$ が backward (forward, resp.) nontrapping, $\pm t > 0$, $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\psi(t) = e^{-itH}\psi_0$ とする。このとき、

$$(x_0, \xi_0) \in WF(\psi(t)) \iff (z_{\mp}, \xi_{\mp}) \in WF(e^{-itH_0}\psi_0).$$

特に、 $T^*\mathbb{R}^n$ 全体で nontrapping ならば、

$$WF(\psi(t)) = w_{\mp}^{-1}(WF(e^{-itH_0}\psi_0))$$

注意 2.2. もしも $W(t) = e^{itH_0}e^{-itH}$ が ξ に関して一次斉次な正準変換 w_{\mp} に対応するフーリエ積分作用素であれば、上の結果はフーリエ積分作用素の一般論から容易にしたがう。実際、上の定理の主張は、以下と同値である： $\pm t > 0$ のとき、 T を $W(t)$ の distribution kernel とし、

$$\Lambda_{\pm} = \{(z_{\pm}(x, \xi), x, \xi_{\pm}(x, \xi), -\xi) \mid (x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0\} \subset T^*\mathbb{R}^{2n} \setminus 0$$

とおくと、 Λ_{\pm} は $T^*\mathbb{R}^{2n}$ のコニックな Lagrangian submanifold であり、

$$WF(T) = \Lambda_{\pm}.$$

この主張は、後で見るように、 T が Λ_{\pm} に対応する Lagrangian distribution である、つまり $W(t)$ がフーリエ積分作用素であるという主張よりは少し弱い。

注意 2.3. このような主張は、Hassell-Wunsch ([1]) の主張にも、かなり近い。彼らは、散乱多様体の上のある種のシュレディンガー作用素の基本解は、“Legendre distribution” であるという、(かなり理解の難しい) 定理を証明し、それを用いて定理 2.1 と同様の結果を導いた。後で見るように、我々の枠組みでは、普通のフーリエ積分作用素の言葉を用いて定理を記述することができる。

3 フーリエ積分作用素の定義について

素朴なフーリエ積分作用素の定義：

最初に、 $W(t)$ がフーリエ積分作用素であることを示すのに、素朴なフーリエ積分作用素の定義を用いるアイデアを考えよう。つまり、

$$U_k \psi(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{i\Psi_k(x,\xi)} a_k(x,\xi) \hat{\psi}(\xi) d\xi$$

の形の作用素を考える。ここで、 $\Psi_k(x,\xi)$ は $T^*\mathbb{R}^n$ 上の滑らかな関数で、 $|\xi| \geq 1$ では ξ に関して一次斉次、 $a_k \in S_{1,0}^0$ である。ただし、

$$S_{\rho,\delta}^m = \{a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}) \mid \forall \alpha, \beta, \sup |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| / \langle \xi \rangle^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|} < \infty\}.$$

このような形の作用素の有限個の積：

$$U = U_1 U_2 \cdots U_N$$

として表される作用素を、フーリエ積分作用素と呼ぶことができる。普通、双曲型方程式の解などは、このような形で構成される。

しかし、この方法で、時間発展方程式を解いて $W(t)$ を構成しようとするとき、困難が生じる。 $|\xi| = R$ の付近での漸近解を構成しようとするとき、(WKB 解を用いることになるが) 時間のメッシュ (細分の長さ) は、 $O(R^{-1})$ となる。したがって、時間について一様な構成は書き下しにくい。ただし、 t を止めて、 ξ を大きくとれば、WKB 解の繰り返しは、有限回で済む。(座標空間で原点から十分に離れれば、時間に関して大域的な WKB 解が構成できる。) でも、きれいな形で書くのは難しい。

注意 3.1. 実際、このアイデアは、 ξ について dyadic decomposition を用いれば、各分割毎に、実行することができる。これを (e^{-itH} に関して) 実際に行ったのが、Bouclet-Tzvetkov の論文で、彼らはこの手法で (長距離型摂動の場合に) Strichartz 評価を証明した。

注意 3.2. 摂動が十分弱い、つまり仮定 A の定数がすべて十分小さい状況では、(固定された (x_0, ξ_0) の近傍から出発する軌道の近くで) 時間に関して大域的なハミルトン・ヤコビ方程式の解を構成できるので、上の方法で基本解を構成することは、たぶん可能だろう。

一般的なフーリエ積分作用素の定義：([2, 7])

この様に、発展方程式を解いて具体的に相関数を構成するのが難しそうなので、抽象的なフーリエ積分作用素の定義、あるいは特徴付けを用いて $W(t)$ がフーリエ積分作用素であることを証明する方向に、方針を変更する。

定義 3 (Lagrangian submanifold). $\Lambda \subset T^*\mathbb{R}^m \setminus 0$ がコニックな Lagrangian submanifold であるとは、 Λ は m -次元の C^∞ -級部分多様体でコニック：

$$(x, \xi) \in \Lambda \Rightarrow (x, \lambda\xi) \in \Lambda \quad (\lambda > 0),$$

しかも、 $T^*\mathbb{R}^m$ 上の標準的な正準形式 $\omega_0 = dx \wedge d\xi$ の Λ への引き戻しが消えている： $i^*\omega_0 = 0$ という事である。

定義 4 (Besov 空間: $B_2^{\sigma, \infty}(\mathbb{R}^m)$). $\sigma \in \mathbb{R}$ とする。 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, $\hat{u} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^m)$ であるとき、 u の Besov ノルムを、

$$\|u\|_{B_2^{\sigma, \infty}} = \left(\int_{|\xi| \leq 1} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} + \sup_{j \geq 0} \left(\int_{2^j \leq |\xi| \leq 2^{j+1}} |2^{\sigma j} \hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

と定義し、

$$B_2^{\sigma, \infty}(\mathbb{R}^m) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \mid \|u\|_{B_2^{\sigma, \infty}} < \infty\}$$

と定義する。

さて、 S_{cl}^m をクラシカルなシンボルクラスとする。つまり、 $a \in S_{cl}^m$ とは、 $a(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2m})$ であって、

$$a(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x, \xi), \quad (a_j(x, \xi) \text{ は } \xi \text{ について } (m-j)\text{-次斉次関数})$$

という漸近展開を持つ事とする。もちろん、 $S_{cl}^m \subset S_{1,0}^m$ である。

定義 5 (Lagrangian distribution). $\Lambda \subset T^*\mathbb{R}^m \setminus 0$ をコニックな Lagrangian submanifold, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, $\sigma \in \mathbb{R}$ とする。 u が Lagrangian distribution である、あるいは $u \in I^\sigma(\mathbb{R}^m, \Lambda)$ であるとは、以下が成り立つ事である。 $p_1, p_2, \dots, p_N \in S_{cl}^1$ であり、 p_j の主シンボルは Λ 上で消えていると、

$$p_1(x, D_x)p_2(x, D_x) \cdots p_N(x, D_x)u \in B_{2,loc}^{-\sigma-m/4, \infty}(\mathbb{R}^m)$$

が成り立つ。

定義からすぐ分かる様に、

$$u \in I^\sigma(\mathbb{R}^m, \Lambda) \Rightarrow WF(u) \subset \Lambda$$

であり、この性質を持つ distribution に、 Λ の近傍での正則性の条件を付け加えたものが Lagrangian distribution であると考えてよいだろう。

定義 6 (フーリエ積分作用素). $U : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とし、その distribution kernel を $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ とする。 U がフーリエ積分作用素であるとは、適当なコニックな Lagrangian submanifold $\Lambda \subset T^*\mathbb{R}^{2n}$ に関して、 u が Lagrangian distribution であること。

このフーリエ積分作用素の定義を、素朴な定義に結びつけるのは、以下の結果である。 $u \in I^\sigma(\mathbb{R}^m, \Lambda)$ が Lagrangian distribution であるとき、 $N \leq m$, θ について一次斉次な C^∞ -級関数 $\Psi(x, \theta)$ と $a(x, \theta) \in S_{1,0}^{\sigma+m/4-N/2}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^N)$ が存在して、

$$u(x) = (2\pi)^{-m/4-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\Psi(x, \theta)} a(x, \theta) d\theta$$

と振動積分で表現できる。ここで、相関数 $\Psi(x, \theta)$ と Lagrangian manifold Λ の関係は、

$$\Lambda = \{(x, \partial_x \Psi(x, \theta)) \in T^*\mathbb{R}^m \mid \partial_\theta \Psi(x, \theta) = 0\}$$

で与えられる。

もしも U が (σ -次の) フーリエ積分作用素ならば、上の結果から、

$$U\psi(x) = (2\pi)^{-n/2-N/2} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N} e^{i\Psi(x, \theta, y)} a(x, \theta, y) \psi(y) dy d\theta, \quad \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

と表現できることが分かる。ここで、 $N \leq 2n$, Ψ は上と同様、 $a \in S_{1,0}^{\sigma+n/2-N/2}$ である。一般には、 $N \leq 2n$ であるが、典型的な状況では $N = n$ と取れると考えられ、すると $a \in S_{1,0}^\sigma$ となり、馴染みのあるフーリエ積分作用素の表現が得られる。

Beals 型のフーリエ積分作用素の特徴付け：

以上のような、一般的なフーリエ積分作用素の定義は、あまり分かりやすすくない (使いやすすくない)。そこで、以下のように、擬微分作用素に関する Beals の特徴付けの一般化を用いて、フーリエ積分作用素を特徴付ける。

我々が考えるのは、 $T^*\mathbb{R}^n$ から $T^*\mathbb{R}^n$ への正準変換 S に対応するフーリエ積分作用素である。ここでは、 S は ξ に関して斉次であると仮定する。

$$(y, \eta) = S(x, \xi)$$

と書くことにしよう。斉次であるから、

$$\Lambda_S = \{(y, x, \eta, -\xi) \mid (x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^n, (y, \eta) = S(x, \xi)\} \subset T^*\mathbb{R}^{2n}$$

はコニックな Lagrangian submanifold である。

$U \in \mathcal{L}(S(\mathbb{R}^n), S'(\mathbb{R}^n))$, $a \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^n)$ に対して、 $Ad_S(a)U$ を、

$$Ad_S(a)U = (a \circ S^{-1})(x, D_x)U - Ua(x, D_x)$$

と定義する。ここで、

$$(CPT) \quad a \text{ は } x \text{ についてコンパクト台, } \text{supp } a \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) = \emptyset$$

と仮定すれば、 $a \circ S^{-1} \in S_{1,0}^m$ であり、 $Ad_S(a)U$ は作用素として問題なく定義されている。以下では、この条件を常に仮定しよう。

定理 3.3. $U \in \mathcal{L}(L_{cpt}^2(\mathbb{R}^n), L_{loc}^2(\mathbb{R}^n))$ とする。任意の $a_1, a_2, \dots, a_N \in S_{cl}^1(\mathbb{R}^n)$ に対して、

$$Ad_S(a_1)Ad_S(a_2) \cdots Ad_S(a_N)U \in \mathcal{L}(L_{cpt}^2(\mathbb{R}^n), L_{loc}^2(\mathbb{R}^n))$$

が成り立つならば、 U は $u \in I^0(\mathbb{R}^{2n}, \Lambda_S)$ を *distribution kernel* とするフーリエ積分作用素である。逆も成立する。

$S = I$ (恒等作用素) の場合は、Beals の擬微分作用素の特徴付け (の一般化) になっている。簡単な擬微分作用素の計算で、定理から次の系が導かれる。

系 3.4. $U \in \mathcal{L}(L^2_{cpt}(\mathbb{R}^n), L^2_{loc}(\mathbb{R}^n))$ とする。条件 (CPT) をみたす任意の $a \in S^1_{cl}$ に対して、 $b \in S^0_{1,0}$ が存在して

$$Ad_S(a)U = b(x, D_x)U$$

となるならば、 U は $u \in I^0(\mathbb{R}^{2n}, \Lambda_S)$ を *distribution kernel* とするフーリエ積分作用素である。

4 最初の結果： $\mu = 1$ の場合

以上の準備の下で、最初の結果を述べよう。

定理 4.1. 仮定 A で、 $\mu = 1$ とする。さらに、 $T^*\mathbb{R}^n$ のすべての点で *nontrapping condition* が成り立つと仮定する。このとき、 $\pm t > 0$ に対して、 $W(t) = e^{itH_0}e^{-itH}$ は w_{\pm} に対応するフーリエ積分作用素である。

注意 4.2. この定理において、nontrapping condition は、局所的な仮定にすることも出来る。つまり、 (x_0, ξ_0) において forward nontrapping condition が成立すれば、 $a(x, \xi) \in S^0_{cl}$ を (x_0, ξ_0) のコニックな近傍への超局所化作用素として、 $t > 0$ において $W(t)a(x, D_x)$ がフーリエ積分作用素である事が証明できる。

証明の概略：

Egorov の定理のアイデアに従って、与えられた nontrapping な (x_0, ξ_0) のコニックな近傍に台を持つ $a \in S^1_{cl}$ に対して、

$$W(t)a(x, D_x)W(t)^{-1} - (a \circ w_{\pm}^{-1})(x, D_x) \in OPS^0_{1,0}$$

が成り立つ事を示す。そうすると、前節の系 3.4 により、 $W(t)$ が与えられた性質を満たすフーリエ積分作用素である事が従う。

$W(t)$ を時間発展と考えると、 $\psi \in \mathcal{S}$ に対して、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W(t)\psi &= e^{itH_0}(iH_0 - iH)e^{-itH}\psi \\ &= -i(e^{itH_0}He^{-itH_0} - H_0)W(t)\psi = -iL(t)W(t)\psi \end{aligned}$$

と書ける。ここで、

$$e^{itH_0}D_x e^{-itH_0} = D_x, \quad e^{itH_0}f(x)e^{-itH_0} = f^w(x - tD_x)$$

が、Weyl 量子化の意味で成り立つので、 $L(t)$ の Weyl シンボルは、

$$\ell(t; x, \xi) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n (a_{jk}(x - t\xi) - \delta_{jk})\xi_j\xi_k + V(x - t\xi)$$

である事が分かる。仮定 A より、 $t \neq 0$ では $\ell(t; \cdot, \cdot) \in S_{1,0}^{1-\mu}$ であり、特異性の伝播測度は 0 である事に注意しよう。

上のシンボル $\ell(t; x, \xi)$ の生成する（時間に依存する）フローは、

$$w(t) = \exp(-tH_{p_0}) \circ \exp(tH_p)$$

である事は、意味を考えても、直接計算しても分かる。ここでは、ポテンシャル項 $V(x)$ を無視して、

$$w_0(t) = \exp(-tH_{p_0}) \circ \exp(tH_k)$$

を用いる。 $(w_0(t))$ は時間とエネルギーに関するスケーリング則を満たすので、 $w(t)$ より、少し扱いやすい。）

以下では、量子化は全て Weyl 量子化を用いる。上の $a \in S_{cl}^1$ に対して、

$$A(t) = W(t)a^w(x, D_x)W(t)^{-1}$$

とおくと、上の計算から、 $A(t)$ はハイゼンベルグ方程式：

$$\frac{d}{dt}A(t) = -i[L(t), A(t)], \quad A(0) = a^w(x, D_x)$$

をみtas。Egorov の定理の証明と同様に、漸近解を構成する事が出来る。特に、 $A(t)$ の Weyl シンボルを $a(t; x, \xi)$ と書くと、その主シンボルは、

$$a_0(t, x, \xi) = (a \circ w_0(t)^{-1})(x, \xi)$$

で与えられ、

$$a(t; x, \xi) - a_0(t; x, \xi) \in S_{1,0}^{1-\mu}$$

をみtas事が分かる。また、 $\pm t > 0$ のとき、

$$a_0(t; x, \xi) - (a \circ w_{\pm}^{-1})(x, \xi) \in S_{1,0}^{1-\mu}$$

であることは、時間とエネルギーに関するスケール則と、古典力学的散乱の性質から分かる。したがって、 $\mu = 1$ ならば、

$$A(t) - (a \circ w_{\pm}^{-1})^w(x, D_x) \in OPS_{1,0}^0$$

である事が示された。（結論は、量子化の選び方に依らない。） \square

注意 4.3. Hassell-Wunsch の結果 ([1]) は、 $\mu = 1$ に対応している（実際は、もう少し強い仮定をしている。）したがって、この結果は、だいたい、彼らの結果に対応していると思われる。

5 一般の場合

ここでは、 $0 < \mu < 1$ の場合を考える。前節の議論では、2カ所で $\mu = 1$ を用いている。

$$(Er1) \quad a(t; x, \xi) - (a \circ w_0(t)^{-1})(x, \xi) \in S_{1,0}^{1-\mu}$$

と、

$$(Er2) \quad (a \circ w_0(t)^{-1})(x, \xi) - (a \circ w_{\pm}^{-1})(x, \xi) \in S_{1,0}^{1-\mu}, \quad \pm t > 0$$

である。じつは、 H_k の生成する $w_0(t)$ の代わりに H_p の生成する $w(t)$ を用いると、(Er1) は改良される： $a \in S_{1,0}^1$ に対して、

$$(Er1') \quad a(t; x, \xi) - (a \circ w(t)^{-1})(x, \xi) \in S_{1,0}^0$$

が成り立つ。しかし、(Er2) の方は改良できない。つまり、

$$(Er2') \quad (a \circ w(t)^{-1})(x, \xi) - (a \circ w_{\pm}^{-1})(x, \xi) \in S_{1,0}^{1-\mu}, \quad \pm t > 0,$$

であり、これ以上良く出来ないことは、直接計算すると分かる。実際、

$$(w(t) - w_{\pm}(t))(x, \xi) = O(\langle \xi \rangle^{-\mu}), \quad \pm t > 0,$$

であり、これから (Er2') は従う。さらに、

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (w(t) - w_{\pm}(t))(x, \xi)| \leq C \langle \xi \rangle^{-\mu-|\beta|}$$

が (x については局所的に) 成り立ち、 $a \circ w(t)^{-1} \in S_{1,0}^1$ であることも分かる。 $\mu = 1$ の場合と同様にして以下のような命題が証明出来る。

命題 5.1. 以上の仮定の下で、*nontrapping* な (x_0, ξ_0) のコニックな近傍に台を持ち、条件 (CPT) をみたす $a \in S_{1,0}^1$ に対して

$$W(t)a(x, D_x)W(t)^{-1} - (a \circ w(t)^{-1})(x, D_x) \in OPS_{1,0}^0.$$

これは、定理 4.1 の本質的な部分と同じに見えるが、 $w(t)$ は一次斉次ではなく、普通の意味でのフーリエ積分作用素のクラスには入らない。しかし、 $w(t)$ は「漸近的に」一次斉次であり、普通のフーリエ積分作用素とほぼ同様の議論が成り立つ。特に、この命題から $W(t)$ は以下のように表現されること分かる。 $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$W(t)\psi(x) = (2\pi)^{-(n+N)/2} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N} e^{i\Psi(t;x,\theta,y)} a(t; x, \theta, y) \psi(y) dy d\theta.$$

ただし、 $N \leq 2n$, $\Psi(t; x, \theta, y) = \Psi_0(t; x, \theta, y) + \Psi_\mu(t; x, \theta, y)$ と書いて、 $\Psi_0(t; x, \theta, y)$ は θ に関して一次斉次、 $\Psi_\mu(t; x, \theta, y)$ は、任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{Z}_+^n$, $\beta \in \mathbb{Z}_+^N$ について

$$|\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta \partial_y^\gamma \Psi_\mu(x, \theta, y)| \leq C_{K,\alpha,\beta,\gamma} \langle \xi \rangle^{1-\mu-|\beta|}, \quad x, y \in K, |\xi| \gg 0,$$

が成り立つ。また、 $a(t; \cdot) \in S_{1,0}^0$.

6 波動作用素の性質

ここでは、波動作用素：

$$W_{\pm} = \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0} = \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} W(t)^*$$

を考える。波動作用素の存在のために、ここでは以下の仮定をする。

仮定 B. $\mu > 0$ が存在して、任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha (a_{jk}(x) - \delta_{jk})| &\leq C_\alpha \langle x \rangle^{-1-\mu-|\alpha|}, \\ |\partial_x^\alpha V(x)| &\leq C_\alpha \langle x \rangle^{-1-\mu-|\alpha|}. \end{aligned}$$

すると、よく知られているように W_{\pm} は存在し、 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の部分等長写像となる。

このとき、 W_{\pm} は、仮定 A と nontrapping condition の下で、古典的波動作用素 w_{\pm}^{-1} に対応するフーリエ積分作用素である。ただし、 $\mu > 0$ でよく、定理 4.1 と同様に、Hörmander の意味でのフーリエ積分作用素である。

証明の概略は、前節までと同様であるが、仮定 B の下では、

$$a(\pm\infty; x, \xi) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} a(t; x, \xi) \in S_{1,0}^1$$

の存在を示すことが出来て、しかも

$$a(\pm\infty; x, \xi) - (a \circ w_{\pm}^{-1})(x, \xi) \in S_{1,0}^0$$

となる。既に時間無限大の極限をとっているので、 w_{\pm} は ξ に関し一次斉次の正準変換であり、定理 3.3 がそのまま使える。また、

$$A(\pm\infty) = \text{w-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} W(t) a^w(x, D_x) W(t)^* = W_{\pm}^* a^w(x, D_x) W_{\pm}$$

であるから、4 節と同様にして、 W_{\pm}^* が w_{\pm} に対応するフーリエ積分作用素であることが導かれる。これは、 W_{\pm} が w_{\pm}^{-1} に対応するフーリエ積分作用素であることと同等である。

7 長距離型摂動の場合

ユークリッド計量からのずれが長距離型の場合も、類似の結果が証明できる。ただし、自由なシュレディンガー発展方程式の代わりに、変形自由時間発展を用いることになる ([6] 参照)。以下の仮定をする：

仮定 C. $\nu > 0$ が存在して、任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して

$$\begin{aligned} |\partial_x^\alpha (a_{jk}(x) - \delta_{jk})| &\leq C_\alpha \langle x \rangle^{-\nu-|\alpha|}, \\ |\partial_x^\alpha V(x)| &\leq C_\alpha \langle x \rangle^{2-\nu-|\alpha|}. \end{aligned}$$

つまり、大まかに言えば、 $\mu = \nu - 1 > -1$ で仮定 A が成り立つ。このとき、高エネルギー領域で、運動量空間でのハミルトン・ヤコビ方程式：

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, \xi) = p(\partial_\xi S(t, \xi), \xi) \quad (|\xi| \gg 0)$$

の解 $S(t, \xi)$ を構成することが出来る。これを用いて、nontrapping な (x_0, ξ_0) に対して、

$$\begin{aligned} \xi_\infty(t; x_0, \xi_0) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-1} \eta(t; x_0, \lambda \xi_0) \\ z_\infty(t; x_0, \xi_0) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (y(t; x_0, \lambda \xi_0) - \partial_\xi S(t; \eta(t; x_0, \lambda \xi_0))) \end{aligned}$$

が存在する。ただし、

$$(y(t; x_0, \xi_0), \eta(t; x_0, \xi_0)) = \exp tH_p(x_0, \xi_0)$$

である。これらは、高エネルギー極限の意味での古典力学的波動作用素である。定義から明らかなように、 $\xi_\infty(t; x_0, \xi_0)$, $z_\infty(t; x_0, \xi_0)$ は、それぞれ ξ_0 について、一次と 0 次の斉次関数である。さらに、以下のような評価が成り立つ：

$$z(t; x_0, \xi_0) = y(t; x_0, \xi_0, \lambda \xi_0) - \partial_\xi S(t; \eta(t; x_0, \lambda \xi_0))$$

とするとき、

$$\begin{aligned} |\xi_\infty(t; x_0, \xi_0) - \eta(t; x_0, \xi_0)| &\leq C \langle \xi_0 \rangle^{1-\nu}, \\ |z_\infty(t; x_0, \xi_0) - z(t; x_0, \xi_0)| &\leq C \langle \xi_0 \rangle^{-\nu} \end{aligned}$$

つまり、 $(z(t; x, \xi), \eta(t; x, \xi))$ は、 $|\xi| \rightarrow \infty$ のとき $(z_\infty(t; x, \xi), \xi_\infty(t; x, \xi))$ に漸近する正準変換である。

我々は、 tH_0 の代わりに $S(t, D_x)$ を用いて、

$$W(t) = e^{iS(t, D_x)} e^{-itH}$$

を考える。

定理 7.1. 仮定 C と、すべての点での *nontrapping condition* を仮定する。このとき、 $W(t)$ は、正準変換

$$w(t) : (x, \xi) \mapsto (z(t; x, \xi), \eta(t; x, \xi))$$

に対応するフーリエ積分作用素である。

注意 7.2. ここで、変形された自由運動：

$$U_S(t) : (x, \xi) \mapsto (x + \partial_\xi S(t, \xi), \xi)$$

は、 $\partial_t S(t, \xi) = p(\partial_\xi S(t, \xi), \xi)$ ($|\xi| \gg 0$) を生成作用素とするフローであり、

$$w(t) = U_S(t)^{-1} \circ \exp tH_p$$

と表現することができる。

8 散乱多様体への一般化

以上の議論は、本質的な変更なしに、「散乱多様体」と呼ばれる、漸近的にコンパクトなリーマン多様体上のシュレディンガー作用素に拡張される。詳細は、ここでは省略する。(伊藤・中村 [3, 4] 参照)

References

- [1] Hassell, A., Wunsch, J.: The Schrödinger propagator for scattering metrics. *Ann. Math.* **162**, 487-523 (2005).
- [2] Hörmander, L.: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*. Vols. 3–4. Springer Verlag 1985.
- [3] Ito, K., Nakamura, S.: Singularities of solutions to Schrödinger equation on scattering manifold. Preprint, Nov. 2007. To appear in *American J. Math.* (<http://arxiv.org/abs/0711.3258>)
- [4] Ito, K., Nakamura, S.: Time-dependent scattering theory for Schrödinger operators on scattering manifolds. Preprint 2008 October. (<http://arxiv.org/abs/0810.1575>)
- [5] Nakamura, S.: Wave front set for solutions to Schrödinger equations. *J. Functional Analysis* **256**, 1299-1309 (2009)
- [6] Nakamura, S.: Semiclassical singularity propagation property for Schrödinger equations. *J. Math. Soc. Japan* **61** (1), 177-211 (2009).
- [7] Sogge, C. H.: *Fourier Integrals in Classical Analysis*, Cambridge Univ. Press 1993.