

中村 周 (Shu NAKAMURA)

A. 研究概要

シュレディンガー方程式を中心に、数理物理の方程式について、関数解析、偏微分方程式などの手法を用いて研究している。昨年度は、以下の4点を中心に研究を行った。

(1) シュレディンガー方程式の解の特異性 (論文 [2,3,5,6]. 伊藤健一, 毛仕寛との共同研究). 散乱理論の手法と半古典極限の手法を組み合わせ、シュレディンガー方程式の解の超局所的特異性を決定する研究をしている。論文 [2] では最も簡単なユークリッド空間上の (変数係数の) シュレディンガー方程式の短距離型摂動の場合、論文 [3] では、摂動が長距離型の場合、論文 [5] では散乱多様体上のシュレディンガー方程式の短距離型摂動の場合を扱っている。また、論文 [6] ではユークリッド空間上の (量子力学的) 調和振動子の摂動の場合を考察している。これからの課題としては、(弱い意味での) 補足的な場合の研究、もっと一般的な多様体上のシュレディンガー作用素の場合の研究を計画している。

(2) 散乱多様体上の散乱理論 (論文 [9]. 伊藤健一との共同研究). 前項の研究で開発された手法を用いて、散乱多様体上の時間に依存する散乱理論を構成し、それに基づいて散乱作用素などの解析を行っている。論文 [9] では短距離型摂動の場合の波動作用素の存在と完全性、散乱行列の Melrose 達による定義との同値性などを示した。散乱行列の超局所性などに関する研究結果を準備中である。さらに、もっと一般の多様体の場合の散乱理論の研究を計画している。

(3) シュレディンガー方程式の解の解析的特異性 (論文 [1,7,8]. A. Martinez, V. Sordoni との共同研究). シュレディンガー方程式の解の解析的特異性の特徴付けを、上記 (1) のアイデアと解析的超局所解析 (Sjöstrand 等) 手法を組み合わせ研究している。

(4) 非定符号のランダムポテンシャルに対するリフシッツ特異性 (論文 [4,10]. F. Klopp との共同研究). いわゆるアンダーソン型のランダム・シュレディンガー作用素において、ポテンシャル関数が不定符号の場合は未解決な問題が多い。論文 [4] では、多くの場合にエネルギー下限でのリフシッツ特異性が成り立つことを証明した。論文 [10] では、論文 [4] では扱えなかった場合や random displacement model を含む、一般化された alloy type のランダム・シュレディンガー

作用素について、シュレディンガー作用素の最低固有値に関する新しい下限評価を用いることにより、リフシッツ特異性の存在を証明した。

I am working on differential equations of mathematical physics, in particular Schrödinger equations, using functional analysis and PDE methods. Here are four topics I have been working on during the last academic year.

(1) **Singularities of solutions to Schrödinger equations** ([2,3,5,6] Joint work with K. Ito, S. Mao). I am working on the characterization of the singularities of solutions to Schrödinger equations, combining the methods of the scattering theory and the semiclassical analysis. In [2], the simplest case, namely short-range perturbation of Schrödinger equations on Euclidean spaces, is considered. In [3], the result is generalized to long-range cases. In [5], the operators on scattering manifolds are considered. The paper [6] concerns the propagation of singularities for perturbed harmonic oscillators, which is essentially different from asymptotically free cases. We are planning to work on (weakly) trapped case, and also on operators on more general manifolds.

(2) **Scattering theory for Schrödinger operators on scattering manifolds** ([9] Joint work with K. Ito). The methods developed in the above analysis are applied to construct time-dependent scattering theory for Schrödinger operators on so-called scattering manifolds, which have asymptotically conic structure. In [9], we showed the existence and the completeness of wave operators, and also showed the equivalence of the definition of the scattering matrix with that of Melrose. We are working on the microlocal properties of the scattering matrix, and also planning to work on operators on more general manifolds.

(3) **Analytic singularities of solutions to Schrödinger equations** ([1,7,8] Joint work with A. Martinez, V. Sordoni). Combining the idea of (1) with the analytic microlocal analysis (Sjöstrand, etc.), we study the characterization of analytic singularities of solution to

Schrödinger equations.

(4) Lifshitz tails for non monotonous alloy type random Schrödinger operators

([4,10] Joint work with F. Klopp). There remains a lot to be understood on the alloy type random Schrödinger operators when the local potential does not have fixed sign. In [4], we showed that the Lifshitz singularities appear at the bottom of the spectrum appears most cases. In [10], we address the special cases not studied in [4], and consider generalized alloy type model, which includes the random displacement model, and showed the Lifshitz tail using a new lower bound on the lowest eigenvalue for Schrödinger operators.

B. 発表論文

1. A. Martinez, S. Nakamura and V. Sordani: “Analytic singularities for long range Schrodinger equations”. *Comptes Rendus Mathematique* **346** (2008) 849–852.
2. S. Nakamura: “Wave front set for solutions to Schrödinger equations”. *J. Functional Analysis* **256** (2009) 1299–1309 .
3. S. Nakamura: “Semiclassical singularity propagation property for Schrödinger equations”. *J. Math. Soc. Japan* **61** (2009) 177–211 .
4. F. Klopp and S. Nakamura: “Spectral extrema and Lifshitz tails for non monotonous alloy type models”. *Commun. Math. Phys.* (in press).
5. K. Ito and S. Nakamura: “Singularities of solutions to Schrödinger equation on scattering manifold”. To appear in *American J. Math.*
6. S. Mao and S. Nakamura: “Wave front set for solutions to perturbed harmonic oscillators”. To appear in *Comm. Partial Differential Equations*.
7. A. Martinez, S. Nakamura and V. Sordani: “Analytic wave front for solutions to Schrödinger equation”, Preprint, June 2007. (<http://arxiv.org/abs/0706.0415>)
8. A. Martinez, S. Nakamura and V. Sordani: “Analytic wave front for solutions to Schrödinger equation II – Long Range Perturbations”. Preprint, July 2008. (<http://arxiv.org/abs/0807.4982>)
9. K. Ito and S. Nakamura: “Time-dependent scattering theory for Schrödinger operators on scattering manifolds”. Preprint, 2008 October. (<http://arxiv.org/abs/0810.1575>)
10. F. Klopp and S. Nakamura: “Lifshitz tails for generalized alloy type random Schrödinger operators”. Preprint, 2009 March. (<http://arxiv.org/abs/0903.2105>)

C. 口頭発表

1. ”Semiclassical singularity propagation property for Schrödinger equation with long-range perturbation”, BIRS Workshop: *Schrödinger Evolution Equations*, Banff, Canada. April 23, 2006.
2. “Singularity of solutions to Schrödinger equation with variable coefficients”, PASI (Pan-American Advanced Studies Institute), Santiago, Chile, July 31, 2006.
3. “Singularity of solutions to Schrödinger equations” (1) Seminar at Dept. Math., The Australian National University, Canberra, Australia, Oct. 30, 2006; (2) International Conference: *Spectral Theory of Random Operators and Related Fields in Probability Theory*, Kyoto Univ., Dec. 11, 2006.
4. 「シュレディンガー方程式の解の特異性とその周辺」日本数学会年会・企画特別講演, 2007年3月30日, 埼玉大学
5. “Topics on scattering theory for Schrödinger operators”. Seminar at Univ. Paris 13, May 29, 2007.
6. “Singularity of solutions to Schrödinger equation on scattering manifold”. (1) Seminar at Univ. Bologna, June 4, 2007;

(2) Mathematical Physics Seminar at Inst. H. Poincaré, Paris, June 11, 2007. (3) Seminar at Euler Institute, St. Petersburg, July 31, 2007.

7. “Remarks on scattering on scattering manifold”. 研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」, 京都大学・数理解析研究所 2008 年 1 月 16 日.
8. “Lifshitz tails for non monotonous alloy type model”. Oberwolfach Workshop: *Disordered Systems: Random Schrödinger Operators and Random Matrices*, Oberwolfach, Germany, March 28, 2008.
9. “Propagation of singularities for Schrödinger operators”. *Second Symposium on Scattering and Spectral Theory*, Serrambi, Brazil, August 21, 2008.
10. “Time-dependent scattering theory for Schrödinger operators on scattering manifolds”. BIRS Workshop: *Mathematical Theory of Resonances*. Banff, Canada, October 23, 2008.

D. 講義

1. 確率統計：確率論の入門的講義．乱歩，確率空間，大数の法則，中心極限定理，大偏差原理などについて説明をした（教養学部・基礎科学科 4 年生講義）
2. 数理解析 1・同演習：複素関数論の入門講義．初等関数，コーシーの定理，テイラー展開，ローラン展開，留数定理などについて説明した．（教養学部・基礎科学科 / 広域システム科学科 2 年生講義）

E. 修士・博士論文

1. (修士) 系崎真一郎 (ITOZAKI Shinichiro): Existence of wave operators for the Schrödinger equations with long range potentials on scattering manifolds.

F. 対外研究サービス

1. 日本数学会・理事

2. 日本数学会・出版委員長
3. 日本数学会・函数方程式論分科会・代表評議員
4. Funcialaj Ekvacioj (日本数学会・函数方程式論分科会・機関誌) 編集委員
5. 国際研究集会:「*Schrödinger Equations and Related Topics*」(東京大学・数理科学研究科, 2009 年 1 月 5 日-8 日) 組織委員

H. 海外からのビジター

1. V. Sordani (ボローニャ大学, 2008 年 3 月 31 日-5 月 31 日): シュレディンガー方程式の特異性の伝播に関する共同研究を行った.
2. A. Martinez (ボローニャ大学, 2008 年 5 月 25 日-5 月 31 日): シュレディンガー方程式の特異性の伝播に関する共同研究を行った.
3. F. Germinet (パリ大学セルジポントワーズ校, 2008 年 10 月 24 日-11 月 2 日): ランダム・シュレディンガー作用素に関するセミナーおよび研究交流を行った.
4. S. Graffi (ボローニャ大学); D. Yafaev (レンヌ大学); A. Jensen (オールボー大学); E. Lieb (プリンストン大学); H. Siedentop (ミュンヘン大学); P. D’Ancona (ローマ大学); D. Chae (成均館大学); T. Hoffmann-Ostenhof (ウィーン大学)(1 月 5 日-9 日): 国際研究集会: *Schrödinger Equations and Related Topics* (東京大学・数理科学研究科, 2009 年 1 月 5 日-8 日) に出席, 講演を行った.