

Anderson localization for the random displacement model

(Frédéric Klopp^{*}, Michael Loss[†], Günter Stolz[‡]との共同研究)

中村 周[§] 2010年9月5日 松本市中央公民館

2010年夏の作用素論シンポジウム

*パリ北大学、ヴィタヌーゼ

†ジョージア大学、アトランタ

‡アラバマ大学、バーミングム

§東京大学、駒場

1. モデルと典型的な例:

\mathbb{R}^d 上のランダム・シュレディンガー作用素:

$$H_\omega = -\Delta + V_\omega, \quad V_\omega(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} q(x - i - \omega_i)$$

を考える。ただし、 $\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ は確率変数で、ランダムな変位を表すと考える。以下では、 $d \geq 2$, $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, 実数値と仮定する。

定理: $\text{supp } q \subset \{x \mid |x| \leq r\}$, $0 < r < 1/4$ 、しかも q は定符号で回転対称とする。 $\{\omega_i\}$ は独立同分布で、 $[-(1/2 - r), 1/2 - r]^d$ の上の一様分布であると仮定する。すると、 H_ω は確率 1 で、スペクトルの下端の近くで稠密な点スペクトルを持ち、固有関数は指数減衰する (アンダーソン局在)。

2. ランダム・シュレディンガー作用素に関する背景

(1) アンダーソン型モデル： $H_\omega = -\Delta + \sum_i \omega_i q(x - i)$. ($i \in \mathbb{Z}^d$)
ただし、 ω_i はランダムな結合定数。 $(q$ は定符号、 ω_i の分布は連続)

(2) ポアッソン型モデル： $H_\omega = -\Delta + \sum_i q(x - \omega_i)$.
ただし、 $\{\omega_i\}$ はポアッソン点過程。 $(q$ は定符号)

* エルゴード的な作用素の属、 $\{H_\omega | \omega \in \Omega\}$ のスペクトル、スペクトルの性質は、確率1で不変である。

* これらについては、アンダーソン局在が証明されている。証明の戦略：

「リフシッツ・テイル」+「ウェグナー評価」

→ 「スペクトル下端でのアンダーソン局在」
マルチスケール理論

(例えば、Peter Stollmann “Caught By Disorder” (2001) を参照)

3. RDMのアンダーソン局在証明の困難

* ランダム変位モデル (random displacement model, RDM) のスペクトル、スペクトルの性質も、確率 1 で不変。しかし：

* ランダム・パラメーターに関する単調性がない。過去のリフシッツ・テイル、ウェグナー評価の証明は、単調性を本質的に用いている。

* 単調性がないので、スペクトルの下限の位置の決定も明らかではない。→ Baker-Loss-Stolz 2008 (CMP), 2009 (JFA): スペクトルの下限の決定、そのような場合の幾何学的配置の決定。

* アンダーソン局在の部分的な結果：

(1) Klopp 1993 (Helv. Phys. Acta): 半古典的状況.

(2) Ghribi-Klopp 2010 (Ann. H. Poincaré): generic な background potential で小さな結合定数。(3) 福島 (2009), 福島-上木 (Peprint) も参照。

4. Baker-Loss-Stolzによるスペクトル下限の決定

* 単位セル： $\Lambda_1 = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x_j| < 1/2, j = 1, \dots, d\}$ 、ポテンシャルの中心の動く範囲を、 $G = [-(1/2 - r), 1/2 - r]^d$ と書く。 $L^2(\Lambda_1)$ 上で

$$H_{\Lambda_1}^N(a) = -\Delta + q(x - a), \quad a \in G,$$

を考える。境界条件は、ノイマン条件、つまり $Q(H_{\Lambda_1}^N(a)) = H^1(\Lambda_1)$ 。

定理： $E_0(a) = \inf \sigma(H_a)$ とすると、 $E_0(a)$ は G 上での最小値を角の集合で取る。つまり、

$$E_0 = \inf_{a \in G} E_0(a) = E_0(b), \quad b \in K = \{a \mid a_j = \pm(1/2 - r), j = 1, \dots, d\}.$$

さらに、 $E_0(a)$ が定数でない限り、これらは真の最小値である。これより、確率 1 で、 H_ω のスペクトルの下限は E_0 で与えられることが分かる。

* ノイマン境界条件が使われていることに注意！

5. 非単調なアンダーソンモデルのリフシッツ・テイル、アンダーソン局在 (Klopp-N CMP (2009), Analysis PDE (2010?))

* 単調性のないモデルのウェグナー評価については、Hislop-Klopp(2002)など、ある程度の結果があるが、スペクトルの下端の決定、リフシッツ・テイルはよく分かっていなかった。上記の論文では、 q の座標面に関する反転対称性の仮定の下に、証明が与えられた。

* 「 $\forall i, \omega_i \in K$ 」 の場合のRDMのリフシッツ・テイルの証明も与えられた。

* これらの論文でも、ノイマン境界条件を与えた Λ_1 上の作用素が本質的に用いられた。

* 二つの研究は、共通点が多い。組み合わせると、RDMのアンダーソン局在が示せないか？ → 共同プロジェクト (“Loss-Stolz” + “Klopp-N”)

6. 証明の要素 (1) Baker-Loss-Stolzの結果の改良

*以下では、常に $E_0(a)$ は定数ではないとする。

定理： $E_0(a)$ は、 $a \in G$ に関して微分可能。しかも、それぞれの $a \in K$ において、(内向きベクトルに関して) 正の微分係数を持つ。

(証明は、固有値の摂動の計算。2次の摂動計算をうまく用いる。…省略)

7. 証明の要素 (2) リフシッツ・テイル

* $L \gg 0, L \in \mathbb{N}$ に対して、 $\Lambda_L = \{x \mid |x_j| < L/2, j = 1, \dots, d\}$, $H_{\Lambda_L}^N(\omega)$ を H_ω を Λ_L に制限してノイマン条件を付けたものとする。

定理： $C > 0, \mu > 1$ が存在して、

$$\mathbb{P}\left(H_{\Lambda_L}^N(\cdot) \text{ は } [E_0, E_0 + C/L^2] \text{ 内に固有値を持つ}\right) \leq L^d \mu^{-L}.$$

(これは、いわゆる大偏差原理の評価。)

証明のポイント： ω に対して、 $\omega_i \in \mathbb{G}$ を一番近い $a \in \mathbb{K}$ に置き換えたものを $c(\omega)$ と書こう。すると、 $C > 0$ が存在して、

$$(1) \quad H_{\Lambda_L}^N(\omega) - E_0 \geq \frac{1}{C} (H_{\Lambda_L}^N(c(\omega)) - E_0), \quad (\forall L, \forall \omega)$$

右辺に関しては、上記の不等式が、Klopp-N(2010)で得られているので、Min-Max原理で定理が従う。

(1) の証明のアイデア : Λ_L を

$$\Lambda_L = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^d \cap \Lambda_L} \Lambda_1(i), \quad \Lambda_1(i) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x_j - i_j| < 1/2, \forall j\}.$$

と分割する。すると、 $C > 0$ が存在して

$$H_{\Lambda_L}^N(\omega) - E_0 \geq \bigoplus_i \left(H_{\Lambda_1(i)}^N(\omega_i) - E_0 \right) \geq \frac{1}{C} \bigoplus_i \left(H_{\Lambda_1(i)}^N(c(\omega)_i) - E_0 \right).$$

作用素としての不等式を示すために、両辺に $\psi \in H^1(\Lambda_L)$ を作用させて期待値をとると、 $H^1(\Lambda_L) \subset \bigoplus_i H^1(\Lambda_1(i))$ であることから、右辺の期待値は、

$$\frac{1}{C} \langle \psi, (H_{\Lambda_L}^N(c(\omega)) - E_0) \psi \rangle \quad \text{と一致することが分かる。} \quad \square$$

8. 証明の要素 (3) ウェグナー評価

定理： (ウェグナー評価) $\delta > 0$ が存在し、 $\alpha \in (0, 1)$ に対して $C_\alpha > 0$ があって、 $I \subset [E_0, E_0 + \delta]$ について

$$\mathbb{P}(I \text{ 内に } H_{\Lambda_L}^N(\cdot) \text{ の固有値が存在する}) \leq C_\alpha |I|^\alpha L^d.$$

* ウェグナーに始まる、標準的な証明のアイデアは、

$$\sum_{i \in \Lambda_L \cap \mathbb{Z}^d} \frac{\partial}{\partial \omega_i} \langle \psi, H_{\Lambda_L}^N(\omega) \psi \rangle, \quad \psi \in H^1(\Lambda_L),$$

を計算することにある。 $\psi_i = \psi|_{\Lambda_1(i)} \in H^1(\Lambda_1(i))$ と書くと、この量は、

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial \omega_i} \langle \psi_i, H_{\Lambda_1(i)}^N(\omega_i) \psi_i \rangle \quad \text{に等しい。}$$

* ψ のエネルギーが小さいとき、Klopp-N-中野-野村 (2003) と同様の方法で、この量を下から評価し、ウェグナー評価を導くことが出来る。 \square

9. いくつかの課題

- * ポテンシャルに対称性がない場合。1次元ではリフシッツ・テイルは成り立たない。これと同様のことが、高次元でも起こるか？アンダーソン局在は証明できるか？(既存の方法は使えない。)
- * 対称性がない代わりに、ランダムに回転させた場合は、どうなるか？(スペクトル下端での固有値の退化が強くなるので、明らかではない。)
- * マルチスケール理論と異なる、分数モーメント法(Aizenman-Molcanov)で、同様の結果は導けるか？連続モデルのアンダーソン局在を、ノイマン・デカップリングの手法と組み合わせて証明できるか？
- * 未だに解けていない、ランダム磁場によるアンダーソン局在へ、これらのアイデアが使えるか？

10 文献：

- [1] F. Klopp., M. Loss, S. Nakamura, G. Stolz: Localization for the random displacement model. Arxiv 2010. (submitted)
- [2] J. Baker, M. Loss, G. Stolz: Minimizing the ground state energy of an electron in a randomly deformed lattice. C.M.P. **283**, 397–415 (2008)
- [3] J. Baker, M. Loss, G. Stolz: Low energy properties of the random displacement models. J.F.A. **256**, 2725–2740 (2009)
- [4] F. Klopp, S. Nakamura: Spectral extrema and Lifshitz tails for non monotonous alloy type models. C.M.P. **287**, 1133–1143 (2009)
- [5] F. Klopp, S. Nakamura: Lifshitz tails for generalized alloy type random Schrödinger operators. To appear in Analysis and PDE.