12 月 9 日 数学 II 問題

12.1 問題

n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & \ddots & \\ & & & 0 & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots\cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

の固有多項式を求めよ．ただし, A において空白部の成分はすべて 0 とする
また, この固有多項式が重根をもつとき, A は対角化が不可能であることを示せ.

12.2 問題

$\mathbb{C}^4$ の部分空間 W_1 として, 連立一次方程式 $2x+y-w=0$ および $y-2z=0$ の解 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ からなる空間をとり, W_2 として連立一次方程式 $x+y-w=0$ および $4y-10z+w=0$ の解からなる空間をとる．このとき, 部分空間 W_1+W_2 を決定せよ.

12.3 問題

次の基底を, Schmidt の直交化法で正規直交基底に直せ.

(i) $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$

(ii) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}.$

(iii) $\begin{pmatrix} 4+4i \\ 1-4i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2+i \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} -1+i \\ 1+4i \\ 4+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4-2i \\ -4-2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3-2i \\ -1+5i \end{pmatrix}.$

12.4 問題

有限次元の計量線形空間 V の部分集合 X (部分空間とは限らない) に対して,

$X^\perp$ を $\{\boldsymbol{y} \in V \mid \forall \boldsymbol{x} \in X.\, \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0\}$ と定義する (部分空間に対する直交補空間の定義と同じ).

(i) $X \subseteq X^{\perp\perp}$ を示せ.

(ii) $X^\perp$ は部分空間となることを示せ.

(iii) $X \subseteq Y$ ならば $X^\perp \supseteq Y^\perp$ となることを示せ.

(iv) $X^{\perp\perp}$ は X を含む最小の部分空間であることを示せ (問題 10.1 参照).

12.5 問題

(i) $[-\pi, \pi]$ 上で連続な実数値関数全体のなす $\mathbb{R}$ 上の線形空間を V とする. V の内積を

$$\langle f, g \rangle \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

で定義する. この定義のもと, V は計量線形空間となることを示せ.

(ii) 0 以上の整数 k に対して $f_k(x) = \cos kx$ と置く. このとき, $\langle f_j, f_k \rangle$ を求めよ.

(iii) $a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx = 1$ が恒等的に成り立つような実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ は存在しないことを示せ.

12.6 問題

(i) 有限次元の計量線形空間 V 上の線形変換 $V \xrightarrow{\varphi} V$ を考える. 部分空間 $W \subseteq V$ が φ に関して不変であることと, 直交補空間 $W^\perp$ が φ^* に関して不変であることは同値であることを示せ.

(ii) $\mathbb{R}^3$ の標準基底に対して, 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -7 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ で表される線形変換を考える. 原点を通る平面 π があって, π 上の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $A\boldsymbol{x}$ は再び π 上にあるという. そのような平面 π を決定せよ.