11月11日 数学II問題

10.1 問題

V を線形空間とし, その部分集合を X (有限集合とは限らない) とする. このとき, X を含む最小の部分空間 $W \subseteq V$ が存在することを証明せよ.

10.2 問題

$\mathbb{R}^3$ の部分空間として

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を基底にもつ部分空間を W とし,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

を基底にもつ部分空間を W' とする. このとき, $W \cap W'$ の基底を求めよ.

10.3 問題

標準的な基底に対し行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ で表される $\mathbb{C}^4$ 上の一次変換 φ を考える. このとき, 核 $\ker\varphi$ および像 $\operatorname{ran}\varphi$ の基底を求めよ.

10.4 問題

$\mathbb{R}^4$ の部分空間として,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を基底にもつ部分空間を W とし,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

を基底にもつ部分空間を W' とする. このとき, W, W' のうち一方が他方の部分空間になるかどうか判定せよ.

10.5 問題

(i) 実数成分からなる n 次正方行列全体を $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ と書くと, これは $\mathbb{R}$ 上の線形空間をなす. このとき, n 次対称行列全体は $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ の部分空間をなすことを示せ. その次元はいくつか.

(ii) 同様に, 複素数成分の場合の $\mathbb{C}$ 上の線形空間を $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ と書く. このとき, n 次 Hermite 行列全体はその部分空間となるか.

10.6 問題

$l \times m$ 行列 A および $m \times n$ 行列 B を用いて, $(l+m) \times (n+m)$ 行列

$$C = \begin{pmatrix} O & A \\ B & E \end{pmatrix}$$

を定める (O は零行列, E は単位行列). このとき, $\operatorname{rank} C \geq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$ が成り立つことを証明せよ.

10.7 問題

$l \times m$ 行列 A と $m \times n$ 行列 B に対し, 不等式

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - m \leq \operatorname{rank}(AB)$$

が成り立つことを示せ.