

## 10月28日 数学II 演習問題

### 9.1 問題

$\mathbb{C}^3$  の基底  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 17 \\ -4 \end{pmatrix}$  から, 基底  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$  への取り替え行列を求めよ.

### 9.2 問題

$\mathbb{C}^3$  の標準的な基底に対して  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  で表されている一次変換を考える.  $\mathbb{C}^3$  の基底を  $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$  に取り替えるとき, 上の一次変換はどのような行列で表されるか.

### 9.3 問題

- (i)  $V \xrightarrow{\varphi} W$  が線形空間  $V, W$  間の同型写像であるとする.  $V$  の基底  $e_1, e_2, \dots, e_n$  に対し,  $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)$  は  $W$  の基底であることを示せ.
- (ii)  $n \neq p$  のとき,  $\mathbb{C}^n$  と  $\mathbb{C}^p$  は同型になり得ないことを示せ.

### 9.4 問題

$m \times n$  複素行列全体の作る線形空間を  $\text{Mat}_{m,n}(\mathbb{C})$  と書く. また,  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $n$  次元線形空間,  $W$  を  $m$  次元線形空間とするとき,  $V$  から  $W$  の中への線形写像全体の作る線形空間を  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$  と書く. このとき, 線形空間としての同型

$$\text{Mat}_{m,n}(\mathbb{C}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$$

が成り立つことを示せ. また, このことを用いて線形空間  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$  の次元を求めよ.

### 9.5 問題

$k$  次以下の多項式全体のなす線形空間を  $V_k$  とする. 多項式  $f(x)$  を  $f(ax^2+c)$  に写す写像は  $V_2$  から  $V_4$  の中への線形写像とみることができる. この線形写像を  $\varphi$  とする.

- (i) 線形空間  $V_k$  の基底として  $1, x, x^2, \dots, x^k$  をとるとき,  $\varphi$  を行列で表せ.

- (ii) 線形空間  $V_k$  の基底を  $1, (x-1), (x-1)^2, \dots, (x-1)^k$  に取り替えたとき,  $\varphi$  を表す行列はどのようなになるか. また, 求めた行列は何を意味しているか, 多項式の言葉で表現してみよ.

### 9.6 問題

複素数列  $a_n = a_0, a_1, a_2, \dots$  全体がなす線形空間の次元は, 有限ではないことを示せ.