

## 10月14日 数学II 演習問題

### 8.1 問題

線形空間  $V$  の定義として次の2つを考える.

定義1. 次の3つが与えられている. (i)  $\mathbf{o} \in V$ . (ii)  $\mathbf{x} \in V$  かつ  $\mathbf{y} \in V$  に対して,  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$ . (iii) スカラー  $c$  および  $\mathbf{x} \in V$  に対して,  $c\mathbf{x} \in V$ . さらに, これらの演算は次の公理を満たす:

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

$$\mathbf{o} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

$$c\mathbf{o} = \mathbf{o}$$

$$c(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{x} + c\mathbf{y}$$

$$0\mathbf{x} = \mathbf{o}$$

$$(c + d)\mathbf{x} = c\mathbf{x} + d\mathbf{x}$$

$$1\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

$$(cd)\mathbf{x} = c(d\mathbf{x})$$

定義2. 次の4つが与えられている. (i) から (iii) は定義1に同じ. (iv)  $\mathbf{x} \in V$  に対して,  $-\mathbf{x} \in V$ . さらに, 公理として次を考える: 定義1の公理から  $c\mathbf{o} = \mathbf{o}$  および  $0\mathbf{x} = \mathbf{o}$  を取り除いて, かわりに  $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{o}$  を入れたもの.

このとき, 定義1と定義2は同値であることを示せ.

### 8.2 問題

次の集合は線形空間であることを示せ. スカラーは  $\mathbb{R}$  でも  $\mathbb{C}$  でもよい.

- (i)  $m \times n$  行列全体.
- (ii) 多項式全体.
- (iii) 収束する数列  $a_n$  全体.
- (iv)  $\mathbb{R}$  から  $\mathbb{R}$  の中への連続関数  $f(x)$  全体. 複素数体上のはきは  $\mathbb{C}$  から  $\mathbb{C}$  の中への連続関数全体.
- (v) 線形空間  $V$  から線形空間  $W$  の中への線形写像  $\varphi(\mathbf{x})$  全体.
- (vi) 一点のみからなる集合.

### 8.3 問題

$n$  次以下の1変数多項式全体 (係数は複素数とする) と,  $\mathbb{C}^{n+1}$  は線形空間として同型であることを示せ.

### 8.4 問題

$n$  次以下の2変数多項式全体のなす線形空間の基底を一つ与え, 次元を求め

よ. また一般に,  $n$  次以下の  $k$  変数多項式全体のなす線形空間の次元はいくつか.

### 8.5 問題

次の 4 ベクトルは  $\mathbb{C}^4$  の基底をなすか.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

### 8.6 問題

5 つの 3 次ベクトル

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

の中から, 基底となるような 3 個を選べ. さらに残りの 2 個を, 基底の一次結合として表せ.