7月15日 数学II 演習問題

7.1 問題

3 次実ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対し, $\langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ は行列式 $\det A$ に等しいことを示せ. ここで, $A = (\boldsymbol{a}\, \boldsymbol{b}\, \boldsymbol{c})$ は 3 個の列ベクトルをこの順でならべてできる 3×3 行列である.

7.2 問題

実数 $a \geq -1/4$ に対して, n 次正方行列

$$\begin{pmatrix} 1+2a & -a & & & & \\ -a & 1+2a & -a & & & \\ & -a & 1+2a & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & & -a \\ & & & & -a & 1+2a \end{pmatrix}$$

は正則であることを示せ. ただし, 空白の部分の成分は 0 とする.

7.3 問題

n 次正方行列 A の余因子行列を $\tilde{A}$ と書く. 等式 $\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$ が成り立つことを示せ.

7.4 問題

n 次正方行列 A の行列式を Δ と書く. また, Δ から r 行と s 列を取り除いてできる $n-1$ 次小行列式を $\Delta_{r,s}$ と書くことにし, Δ から r 行と s 行の二つと, r' 列と s' 列の二つを除いてできる $n-2$ 次小行列式を $\Delta_{rs,r's'}$ と書くことにする. この記法のもとで, $r \neq s$ のとき, 等式

$$\Delta_{r,r}\Delta_{s,s} - \Delta_{r,s}\Delta_{s,r} \;=\; \Delta_{rs,rs}\Delta$$

が成り立つことを示せ.

7.5 問題

正則行列 A の成分がすべて有理数ならば, A^{-1} の成分もすべて有理数であることを示せ.

7.6 問題

Cramer の公式によって次の連立一次方程式の解を求めよ.

(i) $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 4 & 1 \\ -7 & -6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

7.7 問題

Hermite 行列 H と列ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し, $H[\boldsymbol{x}]$ を $\boldsymbol{x}^* H \boldsymbol{x}$ で定義する (Hermite 形式と呼ばれる). すべてのベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $H[\boldsymbol{x}] = 0$ になることと, H が零行列になることは同値であることを示せ.

7.8 問題

$AA^* = A^*A$ を満たす正方行列 A を正規行列と呼ぶ. 正方行列 A が正規行列であることと, $\|A\boldsymbol{x}\| = \|A^*\boldsymbol{x}\|$ がすべてのベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して成り立つことは同値であることを示せ.

7.9 問題

等式 $X^* = -X$ を満たすような正方行列 X を反 Hermite 行列と呼ぶ. このとき, $E + U$ が正則であるようなユニタリ行列 U と反 Hermite 行列 X の間には,

$$X = (E - U)(E + U)^{-1}, \quad U = (E - X)(E + X)^{-1}$$

によって, 一対一対応が定まることを示せ.